



نمذجة ديناميكيات الأوبئة باستخدام نموذج SEIR العشوائي: تحليل مقارن لطرائق التقدير

ا.د. حامد سعد نور الشمرتي
زهراء علاء فلسطين
جامعة البيان كلية إدارة الأعمال

المستخلص

تهدف هذه الدراسة إلى نمذجة ديناميكيات انتشار الأوبئة باستخدام نموذج SEIR العشوائي، مع إجراء تحليل مقارن لطرائق تقدير معالم النموذج، وذلك في إطار يعكس الطبيعة الاحتمالية لانتقال الأمراض المعدية وعدم اليقين المصاحب لها. وقد تم اعتماد المعادلات التفاضلية العشوائية لتمثيل التذبذبات والاضطرابات التي ترافق الانتشار الحقيقي للعدوى، بما يوفر توصيفاً أكثر واقعية مقارنة بالنماذج الحتمية التقليدية. اعتمدت الدراسة منهجية المحاكاة العددية لتوليد بيانات وبائية افتراضية تحت سيناريوهات مختلفة من حيث شدة العدوى، وطول السلاسل الزمنية، وطبيعة التوزيع الاحتمالي للضوضاء. وتم تطبيق ثلاث طرائق لتقدير معالم النموذج، هي: طريقة الإمكان الأعظم (MLE)، ومرشح كالمان الموسع (EKF)، والطريقة البايزية المعتمدة على خوارزميات سلاسل ماركوف مونت كارلو (Bayesian-MCMC)، ثم جرت المقارنة بينها باستخدام مقياس الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الخطأ (RMSE). أظهرت نتائج الدراسة تفوق المنهج البايزي بصورة واضحة في تقدير معالم نموذج SEIR العشوائي، حيث حقق أقل مستويات الخطأ وأظهر استقراراً أعلى في النقاط السلوك الديناميكي للمنظومة الوبائية، خاصة في ظل اختلاف التوزيعات الاحتمالية والسيناريوهات الزمنية. كما بينت النتائج أن زيادة طول السلسلة الزمنية تؤدي إلى تحسين دقة التقدير لجميع الطرائق، مع استمرار أفضلية المنهج البايزي. وأظهرت اختبارات ملائمة التوزيعات الاحتمالية وجود تباين زائد في بيانات الحالات الوبائية، مما يجعل التوزيعات المرنة مثل ذي الحدين السالب وجاما أكثر ملاءمة من توزيع بواسون. كما أشارت تقديرات معامل التكاثر الأساسي إلى اتجاه انحساري للوباء ضمن الإطار الزمني المدروس. تخلصت الدراسة إلى أن استخدام النماذج الوبائية العشوائية، ولا سيما ضمن الإطار البايزي، يمثل نهجاً فعالاً في تحليل ديناميكيات انتشار الأمراض المعدية، ويوفر أدوات كمية دقيقة يمكن أن تساهم في دعم قرارات التخطيط الصحي وإدارة الأوبئة.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية لنموذج SEIR عشوائي، تقدير الامكان الاعظم، مرشح كالمان الموسع، مقدر بيز.

Modeling Epidemic Dynamics Using the Stochastic SEIR Model: A Comparative Analysis of Estimation Methods

Prof. Dr. Hamed Saad Noor Al-Shamarti

Zahraa Alaa

Al-Bayan University, College of Business Administration

Abstract

This study aims to model the dynamics of epidemic spread using a stochastic SEIR model and to conduct a comparative analysis of parameter estimation methods within a framework that captures the probabilistic nature of infectious disease transmission and its associated uncertainty. Stochastic differential equations were employed to represent the fluctuations and random disturbances that accompany real epidemic spread, providing a more realistic description than traditional deterministic



models. The study adopted a numerical simulation approach to generate synthetic epidemiological data under various scenarios in terms of infection intensity, time-series length, and the probabilistic distribution of noise. Three parameter estimation methods were applied: Maximum Likelihood Estimation (MLE), the Extended Kalman Filter (EKF), and a Bayesian approach based on Markov Chain Monte Carlo algorithms (Bayesian–MCMC). The methods were compared using the Root Mean Square Error (RMSE) as the main evaluation criterion. The results demonstrated a clear superiority of the Bayesian approach in estimating the parameters of the stochastic SEIR model, as it achieved the lowest error levels and showed greater stability in capturing the dynamic behavior of the epidemic system, particularly under varying distributions and scenario conditions. The findings also indicated that increasing the length of the time series improves estimation accuracy across all methods, while the Bayesian approach consistently maintains its advantage. Goodness-of-fit tests further revealed the presence of overdispersion in the epidemiological data, indicating that flexible distributions such as the Negative Binomial and Gamma are more suitable than the Poisson distribution for modeling such data. Additionally, the estimated basic reproduction number suggested a declining epidemic trend within the studied time frame. Overall, the study concludes that stochastic epidemiological modeling—particularly within a Bayesian framework—provides an effective approach for analyzing epidemic dynamics and offers robust quantitative tools to support public health planning and epidemic management decisions.

Keywords: Differential equations for a stochastic SEIR model, maximum likelihood estimation, extended Kalman filter, Bayesian estimator.

الفصل الأول

المقدمة، مشكلة الرسالة، هدف الرسالة، والاستعراض المرجعي

1-1 المقدمة

يُعد انتشار الأمراض المعدية من أبرز التحديات الصحية التي تواجه المجتمعات لما يخلفه من آثار صحية واجتماعية واقتصادية واسعة، الأمر الذي جعل النمذجة الرياضية أداة أساسية لفهم ديناميكيات انتقال العدوى والتنبؤ بمسارها. ومن بين النماذج الوبائية المقصورية، يُعد نموذج SEIR من أكثر النماذج استخدامًا، لكونه يأخذ بنظر الاعتبار مرحلة التعرض أو الكمون، وهي مرحلة جوهرية في كثير من الأمراض المعدية حيث يكون الفرد مصابًا دون أن يصبح معديًا بعد.

يمثل نموذج SEIR امتدادًا للنموذج الكلاسيكي SIR، إذ يقسم السكان إلى أربع فئات هي: القابلون للإصابة، والمتعرضون، والمصابون، والمتعافون، ويصف انتقال الأفراد بينها عبر معادلات تفاضلية يمكن صياغتها بصيغة حتمية أو عشوائية. وتكمن أهمية الصيغة العشوائية في قدرتها على تمثيل عدم اليقين والتقلبات الطبيعية في انتشار المرض، مما يجعلها أكثر واقعية عند تحليل البيانات الوبائية الفعلية.



تركز هذه الدراسة على نمذجة ديناميكيات الأوبئة باستخدام نموذج SEIR العشوائي، مع إجراء تحليل مقارنة لطرائق تقدير معالم النموذج، مثل معدل الانتقال ومعدل التعافي. كما تهدف إلى دراسة سلوك النظام الوبائي من خلال تحليل الاستقرار ونقطة التوازن الخالية من المرض، إضافة إلى توظيف البيانات التجريبية لتوضيح كفاءة طرائق التقدير المختلفة في تفسير ديناميكيات انتشار العدوى والتنبؤ بها.

2-1 مشكلة البحث

تعدّ النماذج الوبائية أداة أساسية لفهم ديناميكيات انتشار الأمراض المعدية، ويحتل نموذج SEIR أهمية خاصة لقدرته على توصيف مراحل تطور العدوى عبر تقسيم السكان إلى فئات مختلفة. إلا أن النماذج الحتمية التقليدية غالباً ما تهمل تأثيرات العشوائية وعدم اليقين المصاحبة للانتشار الفعلي للأمراض، مما يحدّ من دقة التقدير والتنبؤ. ومن هنا برزت الحاجة إلى اعتماد الصيغة العشوائية للنموذج، المعتمدة على المعادلات التفاضلية التصادفية، لتمثيل تقلبات الانتشار بصورة أكثر واقعية.

وبناءً على ذلك، تتمثل مشكلة الرسالة في كيفية صياغة نموذج SEIR عشوائي يعكس التأثيرات الاحتمالية في انتقال العدوى، وتطوير طرائق معلمية دقيقة لتقدير معالمه—وخاصة بطريقة الإمكان الأعظم—مع تقييم كفاءة النموذج من خلال تطبيقه على بيانات وبائية وتحليل قدرته على محاكاة السلوك الحقيقي للوباء. وتكمن أهمية معالجة هذه المشكلة في تحسين موثوقية التنبؤات ودعم القرارات الصحية المبنية على نماذج كمية واقعية.

3-1 البحث

تهدف هذه الرسالة إلى نمذجة ديناميكيات انتشار الأوبئة باستخدام نموذج SEIR العشوائي، مع إجراء تحليل مقارنة لطرائق تقدير معالم النموذج، وذلك بهدف الوصول إلى أساليب تقدير أكثر دقة وموثوقية تسهم في تفسير سلوك انتشار الأمراض المعدية والتنبؤ بمسارها.

وتتمثل الأهداف الرئيسية للرسالة فيما يأتي:

- بناء وصياغة نموذج SEIR عشوائي قائم على المعادلات التفاضلية التصادفية لتمثيل التأثيرات العشوائية المصاحبة لانتشار الأوبئة.
- تطوير وتطبيق مجموعة من طرائق التقدير المعلمية لمعاملات النموذج، مثل معدلات الانتقال والتعافي وفترة الحضانه.
- إجراء تحليل مقارنة بين طرائق التقدير المختلفة من حيث الكفاءة والدقة والاستقرار الإحصائي.
- تحليل ديناميكيات انتشار الوباء في ضوء المعالم المقدّرة، ودراسة سلوك النظام الوبائي واحتمالات استمرار العدوى أو انحسارها.
- تقييم أداء النموذج وطرائق التقدير من خلال تطبيقها على بيانات وبائية فعلية أو محاكاة، باستخدام مقاييس إحصائية مناسبة.
- تقديم نتائج وتوصيات علمية تدعم استخدام النماذج العشوائية في تحسين التنبؤات الوبائية وتعزيز فاعلية السياسات الصحية الوقائية.

ومن خلال تحقيق هذه الأهداف، تسعى الدراسة إلى الإسهام في تطوير الأساليب الكمية لنمذجة الأوبئة، وتعزيز الاعتماد على النماذج العشوائية والتحليل المقارن لطرائق التقدير في دعم اتخاذ القرار الصحي.



4-1 الاستعراض المرجعي Reference Review

تُعدّ النمذجة الوبائية أداة مهمة تُستخدم لدراسة الأمراض المعدية، حيث تساعد في تحليل انتشار الأوبئة والتنبؤ بتطورها في المستقبل. كما تُستخدم أيضاً في تقييم استراتيجيات السيطرة والوقاية من الأمراض المعدية.

كان العالم جون جران (John Graunt) أول من حاول تحديد أسباب الوفيات المرتبطة بالأوبئة، وذلك في كتابه الصادر عام 1662 لاحقاً، ساهم العالم روس (Ross) عام 1910 في تطوير مجال النمذجة الوبائية من خلال دراسة انتشار الملاريا.

وفي عام 1927، قدم العالمان McKendrick & Kermack نموذجاً رياضياً أكثر دقة لوصف انتشار الأمراض المعدية، والذي يُعتبر من أهم النماذج المجزأة في علم الأوبئة. وقد استُخدم هذا النموذج لوصف العلاقة بين المصابين والمعرضين للإصابة والمُتعافين، مما أتاح التنبؤ بمسار انتشار المرض عبر فترات زمنية مختلفة.

يعتمد النموذج على نظام من المعادلات التفاضلية الخطية، حيث يُصنّف الخلايا إلى مجموعتين رئيسيتين: الخلايا المصابة والخلايا غير المصابة. وقد تم تطوير هذه المعادلات تحت افتراضات ثابتة تشمل معدلات الإصابة ومعدلات التأثير العلاجي، مما أتاح تقديم حلول تحليلية للنموذج المطروح.

استخدم هذا النموذج في تقدير المعاملات الثابتة المرتبطة بانحدار الفيروس خلال المراحل المبكرة من العلاج، مما ساهم في فهم سلوك فيروس نقص المناعة البشرية (HIV-1) بشكل أكثر دقة، وخاصة فيما يتعلق بتفاعل الفيروس مع الأدوية المضادة وتأثير العلاجات على تقليل الحمل الفيروسي بمرور الوقت.

وفي عام (2021) ناقش الباحث (V.Chandrasekar) وآخرون تأثير العوامل البيئية والاجتماعية على انتشار كوفيد-19 باستخدام نموذج *SEIR* في الهند. أوضحت النتائج أن السياسات الحكومية مثل الإغلاق العام وارتداء الأقنعة يمكن أن تقلل بشكل كبير من معدل انتقال العدوى، مما يدل على أهمية دمج هذه العوامل في نمذجة الأوبئة تم تطوير نماذج محسنة لـ *SEIR* تأخذ في الاعتبار معدلات الانتقال غير الخطية، مثل نموذج *SEIRS* الذي يسمح للأفراد المتعافين بالعودة إلى فئة القابلين للإصابة بعد فترة من الزمن [1].

وفي العام (2022) قدم الباحثان (Rustum & Al-Temimi) استخدام طريقة رنج-كوتا لحل نموذج *SIR* المطبق على انتشار كوفيد-19 في العراق، حيث أظهرت النتائج أن التقديرات العددية لـ R_0 تساعد في تقييم فعالية التدخلات الصحية المختلفة. [2]

وفي نفس العام ناقشت أطروحة (S.Dado) نهجاً موسعاً لنموذج *SEIR* من خلال إدخال دالة الإصابة المعممة (Generalized Incidence Function) لتحليل انتشار كوفيد-19. تم دراسة استقرار التوازن المرضي، واستخدام وظائف ليابونوف لتحديد الشروط التي تجعل النموذج مستقرًا عند $R_0 < 1$ بينما يُصبح النموذج غير مستقر عند $R_0 > 1$ أكدت نتائج الدراسة أن زيادة عدد المعلمات يزيد من حساسية النموذج، مما يستلزم دقة أكبر في تقدير المعلمات لضمان توقعات دقيقة. [3]

وفي نفس العام ناقش الباحثان (Taghizadeh & Mohammad-Djafari) استخدام تحليل المربعات الصغرى غير الخطية (NLS) إلى جانب النهج البايزي يتيح استنتاج معلمات متغيرة مع مرور الوقت، مما يحسن دقة التوقعات مقارنة بالنماذج ذات المعلمات الثابتة. [4]

وفي العام (2023) ناقش الباحث (M. Aakash) وآخرون مقارنة طريقتي أويلر ورنج-كوتا في تحليل انتشار كوفيد-19 في مدينة تريفاندروم، وأظهرت النتائج أن طريقة رنج-كوتا أكثر دقة واستقراراً في تقدير المعلمات مقارنة بطريقة أويلر [5].

الفصل الثاني الجانب النظري

1- المقدمة : Introduction



تُعَدّ النمذجة الرياضية للأمراض المعدية من الميادين العلمية الحيوية التي تشهد تطورًا مستمرًا في البحث والتطبيق. وتهدف هذه النمذجة إلى فهم ديناميكيات انتشار العدوى والسيطرة عليها من خلال ربط السلوك الوبائي للسكان بخصائص العائل (Host) والمُمْرَض (Pathogen)، وبآليات انتقال العدوى بين الأفراد.

تصنّف الأمراض عادةً إلى ثلاث فئات رئيسية:

- الوباء (Epidemic): وهو تفشٍ سريع لمرض معدٍ يصيب عددًا كبيرًا من الأفراد في منطقة أو مجتمع خلال فترة زمنية قصيرة.
- الجائحة (Pandemic): وهي انتشار الوباء على نطاق جغرافي واسع أو عالمي.
- المرض المتوطن (Endemic): عندما يُحافظ على وجود المرض داخل مجتمع معين دون الحاجة إلى عوامل خارجية لاستمراره.

يمتد تاريخ استخدام النماذج الرياضية في علم الأوبئة إلى القرن الثامن عشر، وقد شهد هذا المجال منذ ذلك الحين تطورًا كبيرًا بفضل أعمال العديد من العلماء وقد أسهمت هذه الدراسات في إرساء الأسس النظرية لعلم الأوبئة الرياضي، مما أتاح تطوير عددٍ كبيرٍ من النماذج التي طُبقت على أمراضٍ مختلفة من حيث التحليل الكمي والنوعي. تُعَدّ النظريات الكلاسيكية لكيرماك وماكندريك (Kermack & McKendrick, 1927) حجر الأساس في تطور النمذجة الرياضية للأمراض المعدية، إذ ما تزال صالحة وفعّالة في توصيف العديد من الحالات الوبائية المعاصرة تعتمد أغلب النماذج الوبائية الرياضية على منهج النماذج التقسيمية (Compartmental Models)، التي تُقسّم السكان إلى مجموعات وفقًا لحالتهم الوبائية، وتُحدّد معدلات الانتقال بين هذه المجموعات وفق فرضيات رياضية معينة. على سبيل المثال، تختلف النماذج الخاصة بالأمراض التي تمنح مناعة دائمة بعد الشفاء عن تلك التي لا تولّد أي مناعة.

وقد افترض كيرماك وماكندريك أن المجتمع مغلق، أي لا توجد مواليد أو وفيات بخلاف تلك الناتجة عن المرض ذاته، وهو ما يُعرف بـ النموذج الحتمي من نوع SIR المعرّضون للإصابة – المصابون – المتعافون. (وتتنتمي إلى هذا النوع العديد من أمراض الطفولة مثل الحصبة والجذري المائي والحصبة الألمانية). لاحقًا أُضيفت فئة “المكتشفين (E)” إلى النموذج لتشكيل ما يُعرف بـ نموذج SEIR الذي يصف الأمراض ذات فترة الكمون مثل الإيبولا أو الكوليرا أو السل.

2-2 النموذج العشوائي SEIR باستخدام المعادلات التفاضلية العشوائية [7][6]

يعد نموذج SEIR العشوائي النتيجة المطورة لأنموذج SEIR الكلاسيكي إذا تدخل حد العشوائية (random term) من أجل محاكاة التقلبات الغير متوقعة في انتشار الأوبئة. ويعد النموذج SEIR العشوائي أحد النماذج التي تستعمل لتحليل ديناميكية الأوبئة في ظل وجود حالات غير مؤكدة على سبيل المثال:

- اختلافات في سلوك الفرد.

- اختلافات في معدلات انتقال الأوبئة نتيجة لعوامل بيئية.

- أخطاء في عملية جمع واخذ القياسات الخاصة بالبيانات.

المكونات الأساسية لأنموذج SEIR العشوائي يمكن تصنيفها استنادًا للسكان بشكل عام.

إذ يمكن تقسيم السكان إلى:

- الفئات المعرضون للإصابة (SUSCEPTIBLE) ويرمز لها بالرمز (S) ويقصد بها الأشخاص الأصحاء الذين يمكن ان يصابوا بالوباء.

- الفئات الحاضنة (EXPOSED) ويرمز لها بالرمز (E) ويقصد بها الأشخاص المصابون بالوباء ولكن غير ناقلين للعدوى (أي فترة الحضانة).



- الفئات المصابة والمعدون (INFECTIOUS) ويرمز لها بالرمز (I) ويقصد بهم الأشخاص المصابون والقادرين على نقل المرض.
- الفئات المتعافية (RECOVERED) ويرمز لها بالرمز (R) ويقصد بهم الأشخاص المتعافين أو امتلكوا مناعة بعد الإصابة (المحصنون).
- وبالتالي فإن إجمالي السكان $[N=S+E+I+R]$ وللوقوف على أهم الاختلافات بين النموذج التام (Exact) والنموذج العشوائي (Stochastic)

1-2-2 الصيغة الرياضية لنموذج SEIR التصادفي (العشوائي) [8][9]

تُعتبر النماذج من نوع SEIR من أكثر النماذج دقة في تمثيل الأمراض التي تمرّ بفترة حضانة (كمون) بين التعرض للعدوى وظهور الأعراض. فبعد انتقال العدوى من فردٍ مصاب إلى آخر سليم، يدخل الأخير في حالة كامنة (E) قبل أن يصبح معدياً (I)، ثم ينتقل في النهاية إلى فئة المتعافين (R) ويُستخدم هذا النموذج لتحليل تأثير فترة الحضانة على ديناميكيات انتقال العدوى وانتشارها بين الأفراد. يُفترض أن السكان يُقسّمون إلى أربع فئات:

١. $S(t)$ (Susceptible): الأفراد المعرضون للإصابة
٢. $E(t)$ (Exposed): الأفراد المصابون بالعدوى لكن لم تظهر عليهم الأعراض بعد (فترة الحضانة)
٣. $I(t)$ (Infectious): الأفراد المصابون الذين يمكنهم نقل العدوى
٤. $R(t)$ (Recovered): الأفراد الذين تماثلوا للشفاء المتعافين

تُبنى ديناميكية هذا النموذج على معدل الإصابة الثنائي (Bilinear incidence rate) الذي يُعبّر عنه بـ $\beta \frac{S(t)I(t)}{N}$ ، استناداً إلى قانون الفعل الجماعي (Law of Mass Action)، والذي يُفترض فيه أن عدد الاتصالات بين الأفراد يتناسب مع حاصل ضرب أعداد المعرضين والمصابين يفترض النموذج أن عدد السكان ثابت خلال فترة الدراسة (أي لا يوجد نمو سكاني أو هجرة)، وأن الأفراد الذين تعافوا يكتسبون مناعة دائمة.

بناءً على هذه الفرضيات، يُوصف نموذج SEIR بالمعادلات التفاضلية التالية:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta \frac{S(t)I(t)}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - \alpha E(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

حيث تمثل $S(t)$ ، $E(t)$ ، $I(t)$ و $R(t)$ أعداد الأفراد المعرضين للإصابة، والمكتشوفين، والمصابين، والمتعافين في الزمن t على التوالي.

ومن المعادلات السابقة يتبين أن حجم المجتمع الكلي ثابت بمرور الزمن، لأن:

$$\frac{d(S + E + I + R)}{dt} = 0 \quad \dots (2)$$

وهذا يعني أن:

$$N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) \dots (3)$$

أي أن معدل التغير في عدد السكان الكلي



$$\frac{dN}{dt} = 0 \dots (4)$$

بناءً على ذلك يمكن التعبير عن عدد الأفراد المتعافين R بدلالة المتغيرات الأخرى وفق العلاقة:

$$R = N - S - E - I \dots (5)$$

وحيث ان المعلمات في المعادلات تمثل: -

- β : تمثل معدل انتقال العدوى بين الأفراد وهي تصف عدد الاتصالات الكافية لنقل العدوى التي يجريها الفرد المصاب في وحدة الزمن.
- α : تعبر عن معدل انتقال الأفراد من فئة المكشوفين (E) إلى فئة المصابين (I)، أي المعدل الذي تظهر فيه الأعراض وتبدأ فيه العدوى الفعلية. بالتالي فإن $\frac{1}{\alpha}$ تمثل متوسط فترة الكمون التي يقضيها الفرد بين الإصابة بالعدوى وبدء العدوى للآخرين.
- γ : تمثل معدل التعافي أو الإزالة من فئة المصابين، بحيث تعبر $1/\gamma$ عن متوسط مدة العدوى قبل الشفاء أو الوفاة.

وقد أشار بعض الباحثين إلى أن النموذج $SEIR$ يختزل إلى النموذج SIR عندما تكون قيمة $\alpha \rightarrow \infty$ أي عندما تصبح فترة الكمون قصيرة جداً (تقريباً صفرية)، مما يعني أن العدوى تنتقل مباشرة من فئة المعرضين إلى المصابين دون تأخير زمني ملموس يمثل هذا النظام أساس التحليل الرياضي لديناميكيات الوباء.

2-2-2 المعادلات التفاضلية العشوائية (Stochastic Differential Equations) [10]

تستخدم المعادلات التفاضلية العادية (ODEs) على نطاق واسع في توصيف الأنظمة الفيزيائية والهندسية والحيوية، إلا أن المسارات التجريبية التي يتم رصدها عملياً غالباً ما لا تتوافق مع الحلول النظرية المتوقعة من النماذج الحتمية. ويُعزى ذلك إلى إهمال العوامل العشوائية التي قد تؤثر في سلوك النظام الفعلي. من هنا نشأت الحاجة إلى إدخال الضوضاء العشوائية (random noise) ضمن النموذج الرياضي نفسه، الأمر الذي يؤدي إلى صياغة ما يُعرف بـ المعادلات التفاضلية العشوائية (Stochastic Differential Equations – SDEs) تصف هذه المعادلات تطور متجه الحالة $X(t)$ زمنياً بناءً على الخصائص الفيزيائية التقريبية للنظام الواقعي، مع الأخذ في الاعتبار عمليات عشوائية مرافقة (driving noise processes) تعبر عن الظواهر غير الممثلة صراحة في النموذج الحتمي. وبذلك، يمكن اعتبار الـ SDE امتداداً للـ ODE يهدف إلى تضمين التغيرات العشوائية التي قد تنشأ في الطبيعة أو من مصادر بيئية أو تجريبية. إذا كانت حالة النظام عند الزمن t يُعبر عنها بدالة $X(t)$ ، فيمكن تمثيلها رياضياً بالمعادلة:

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)), t \geq 0 \dots (6)$$

حيث $f(t, X(t))$ تصف معدل تغير الحالة. يمكن إعادة كتابتها بالصيغة التفاضلية:

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt \dots (7)$$

أو في شكلها التكاملية:

$$X(t) = X(0) + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds \dots (8)$$

لكن نظراً إلى أن الأنظمة الفيزيائية غالباً ما تتأثر بظروف غير معروفة بدقة، فإن تمثيلها بدالة واحدة حتمية لا يعكس سلوكها الفعلي. لذلك يمكن تضمين عامل اضطراب عشوائي يعتمد على t و $X(t)$ ، لتصبح المعادلة:

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t)) \xi_t, X(t_0) = x_0. \dots (9)$$



حيث تمثل ξ_t مصدر الضوضاء العشوائية الذي يؤثر في ديناميكيات النظام. هذه الصياغة تجعل من المعادلة التفاضلية العشوائية نسخة موسّعة من المعادلة العادية مع إضافة اضطراب عشوائي في معدل التغير. وفي الصورة التفاضلية:

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) \xi_t dt, X(t_0) = x_0 \quad \dots \quad (10)$$

وفي الصورة التكاملية:

$$X(t) = X(0) + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s)) \xi_s ds. \quad \dots \quad (11)$$

من الصعب التعامل رياضياً مع التكامل العشوائي في (14) باستخدام أدوات التحليل التقليدية، لذا يُفترض أن الضوضاء $\xi(t)$ تمثل المشتقة الزمنية لحركة براونية (Brownian motion)، والمعروفة أيضاً بعملية فينر (Wiener process) بحيث:

$$dW(t) = \xi(t) dt. \quad \dots \quad (12)$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على الصيغة القياسية للـ SDE

$$dX(t) = f(t, X(t)) dt + g(t, X(t)) dW(t). \quad \dots \quad (13)$$

تتكوّن هذه المعادلة من جزأين أساسيين:

- الانجراف (Drift term) ويُعبّر عنه بالحد $f(t, X(t))$ وهو المسؤول عن الاتجاه الحتمي للنظام.
- الانتشار (Diffusion term) وهو الحد $g(t, X(t)) dW(t)$ ويصف مقدار العشوائية أو التشتت في السلوك.

وعندما يكون $g(t, X(t)) = 0$ تختفي العشوائية ويعود النموذج إلى الصيغة الحتمية التقليدية. الحل الخاص بالـ SDE إن وُجد يُعد عملية عشوائية تُعرف بعملية الانتشار (diffusion process) وتُفسّر هذه المعادلات عادة وفق أحد نوعين من الحلول:

1. الحل الضعيف (Weak Solution):

يقوم على بناء فضاء احتمالي (probability space) يمكن فيه إنشاء حركة براونية $W(t)$ وعملية $X(t)$ بحيث تحققان المعادلة التكاملية المقابلة للـ SDE في هذا الإطار، لا يُشترط أن تكون حركة براونية محددة مسبقاً.

2. الحل القوي (Strong Solution):

يُعرّف على فضاء احتمالي معلوم مسبقاً وتُطلب فيه مطابقة العملية $X(t)$ للمعادلة على هذا الفضاء نفسه، باستخدام حركة براونية معروفة.

يُعرّف التكامل في سياق المعادلات العشوائية بطريقتين أساسيتين:

1. تكامل إيتو (Itô Integral):

يُستخدم على نطاق واسع في النمذجة الإحصائية، ويُعبّر عنه بالعلاقة:

$$\int_a^b W(t) dW(t)_{Itô} = \frac{1}{2} (W^2(b) - W^2(a)) + \frac{1}{2} (b - a) \quad \dots \quad (14)$$

2. تكامل ستراتونوفيتش (Stratonovich Integral):

يُفضّل في التطبيقات الفيزيائية لأنه يحتفظ بقواعد التفاضل التقليدية، ويكتب بالشكل:

$$\int_a^b W(t) \circ dW(t)_{Stratonovich} = \frac{1}{2} (W^2(b) - W^2(a)) \quad \dots \quad (15)$$

ويُستخدم الرمز \circ للدلالة على تكامل ستراتونوفيتش، تمييزاً له عن تكامل إيتو.



الفصل الثالث الجانب التجريبي

1-3 المقدمة

يتناول هذا الفصل دراسة تطبيقية ضمن إطار نمذجة ديناميكيات الأوبئة باستخدام نموذج SEIR العشوائي، إذ يعتمد على تجارب محاكاة عددية تستند إلى الصياغة التصادية للنموذج التي تم عرضها في الجانب النظري. ويركز الفصل على إجراء تحليل مقارن لطرائق تقدير معاملات النموذج، من خلال تطبيق ثلاث طرائق إحصائية رئيسية هي: طريقة الإمكان الأعظم (MLE)، ومرشح كالمان الموسع (EKF)، والطريقة البايزية المعتمدة على سلاسل ماركوف مونت كارلو (Bayesian-MCMC).

وقد تم اعتماد أسلوب المحاكاة العددية لتوليد بيانات تمثل تطور الحالات الوبائية عبر الزمن تحت سيناريوهات مختلفة، شملت تباين شدة انتقال العدوى، واختلاف أطوال السلاسل الزمنية، وتنوع التوزيعات الاحتمالية للضوضاء العشوائية، وذلك بهدف تقييم أداء طرائق التقدير في ظروف متعددة ومقارنة كفاءتها الإحصائية.

وتهدف هذه الدراسة المقارنة إلى تحديد الطريقة الأكثر دقة واستقراراً في تقدير معاملات نموذج SEIR العشوائي، من خلال تحليل القيم المقدرة ومقارنتها بالقيم الحقيقية للمعاملات، فضلاً عن استخدام مقاييس الخطأ الإحصائية مثل الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الخطأ (RMSE) لتقييم جودة التقدير. كما تسهم النتائج في بيان مدى تأثير طرائق التقدير بطبيعة الضوضاء العشوائية ودرجة لاخطية النظام الوبائي، بما يدعم اختيار أسلوب التقدير الأنسب عند تطبيق النموذج على بيانات وبائية واقعية في المراحل اللاحقة من الدراسة.

2-3 مفهوم المحاكاة (Simulation Concept)

تُعرّف المحاكاة بأنها عملية بناء نموذج افتراضي يمثل نظاماً واقعياً أو ظاهرة معقدة، ثم تشغيل هذا النموذج عبر فترة زمنية محددة بهدف تتبع سلوك النظام وتحليل استجابته لمجموعة من الشروط والمتغيرات. وتُسهم المحاكاة في توفير فهم أعمق للعلاقات الديناميكية التي تحكم الظاهرة محل الدراسة، كما تُمكن من تحليل تأثير العوامل المختلفة في تطورها عبر الزمن.

وتعتمد المحاكاة بصورة أساسية على الإمكانيات الحاسوبية لتنفيذ النماذج الرياضية بدقة، وتوليد بيانات اصطناعية تحاكي الواقع، ومن ثم استخراج المؤشرات الإحصائية وتحليل النتائج بشكل منهجي، مما يجعلها أداة فعالة لدراسة الأنظمة المعقدة التي يصعب تحليلها تحليلياً بصورة مباشرة، ولاسيما في نمذجة ديناميكيات الأوبئة باستخدام النماذج العشوائية.

أغراض استخدام المحاكاة

تُستخدم المحاكاة في الدراسات الإحصائية والتطبيقية لتحقيق عدة أهداف، من أبرزها:

أولاً: تقييم النماذج الإحصائية

تُستعمل المحاكاة لتوليد بيانات عشوائية وفق افتراضات محددة، ثم تطبيق طرائق التقدير المختلفة عليها



بههدف تقييم كفاءة النماذج ومقدّراتها. ويساعد ذلك في قياس قدرة النموذج على استرجاع القيم الحقيقية للمعلمات، ومدى استقراره تحت ظروف مختلفة مثل تغيير حجم العينة أو مستوى الضوضاء العشوائية.

ثانياً: دراسة تأثير المتغيرات والمعلمات

تمكّن المحاكاة من تحليل أثر التغيير في قيم المعلمات أو المتغيرات على سلوك النظام، من خلال تكرار التجارب العددية مع تعديل القيم في كل مرة، مما يساعد في تحديد حساسية النموذج تجاه المعلمات المختلفة وقياس درجة تأثيرها في ديناميكية النظام.

ثالثاً: تحسين طرائق التقدير والإجراءات التحليلية

تسهم المحاكاة في اختبار كفاءة طرائق التقدير الإحصائي ومقارنتها تحت سيناريوهات متعددة. ومن خلال تحليل نتائجها يمكن اختيار الطريقة الأكثر ملاءمة أو تطوير الخوارزميات المستخدمة، بما يحدّ من الانحياز ويزيد من دقة التقدير ويحسن الأداء الإحصائي العام.

المرحلة الأولى: تهيئة النموذج وتحديد القيم الأولية

تُعد هذه المرحلة الأساس في تصميم تجربة المحاكاة، حيث تم تحديد معلمات النموذج والمتغيرات الابتدائية اللازمة لتوليد البيانات وفق ما يأتي:

1- حجم المجتمع (N)

تم تثبيت الحجم الكلي للمجتمع في النموذج الوبائي عند:

$$N = 216,617$$

2- الأفق الزمني للمحاكاة (T)

لدراسة سلوك المقدّرات مع تغيير حجم العينة الزمنية، تم اعتماد عدة أطوال للسلاسل الزمنية:

$$T = \{30, 50, 100, 150\}$$

3- عدد التكرارات (r)

لضمان استقرار النتائج وتقليل أثر التذبذب العشوائي، تم تحديد عدد تكرارات التجربة بـ:

$$r = 500$$

4- معلمات النموذج الوبائي

استناداً إلى نتائج التقدير بطريقة الإمكان الأعظم للبيانات التطبيقية، تم تحديد ثلاث قيم لكل معلمة، واعتماد القيم الوسطية بوصفها القيم الحقيقية في المحاكاة:

- معدل الانتقال من المعرضين إلى المصابين: (α)

القيم المقترحة (1.886) ، ، 3.772 ، 5.659)

القيمة المعتمدة $\alpha = 3.772$:

- معدل العدوى: (β)

القيم المقترحة (0.529) ، ، 1.058 ، 1.588)

القيمة المعتمدة $\beta = 1.058$:



- معدل الشفاء: (γ)
- القيم المقترحة (1.49) ، ، 2.981 ، 4.472
- القيمة المعتمدة $\gamma = 2.981$:

5-القيم الابتدائية للمتغيرات

تم تحديد القيم الابتدائية للمتغيرات S_0 و I_0 و R_0 بالاعتماد على المتوسطات المستخرجة من البيانات التطبيقية، لتكون نقطة البداية للحل العددي للمعادلات التفاضلية.

المرحلة الثانية: توليد القيم الحتمية للنموذج

بعد تثبيت المعلمات والقيم الابتدائية، تم توليد المسارات الزمنية الحتمية لمتغيرات النموذج $(S(t))$ ، $E(t)$ ، $I(t)$ ، باستخدام طريقة أويلر العددية لحل المعادلات التفاضلية. وتمثل هذه القيم الأساس الذي تُبنى عليه إضافة المركبة العشوائية في المرحلة اللاحقة.

المرحلة الثالثة: إدخال العشوائية وتوليد البيانات

لتمثيل الطبيعة الاحتمالية لانتشار الأوبئة، تم تحويل القيم الحتمية إلى بيانات عشوائية باستخدام أربعة توزيعات احتمالية هي:

- توزيع بواسون: توليد القيم اعتماداً على المعلمة الحتمية لكل متغير.
- التوزيع ذي الحدين السالب: استُخدم لتمثيل التشتت الزائد مع معلمة تشتت ثابتة. ($k = 25$)
- توزيع غاما: لتوليد بيانات مستمرة باستخدام معلمات الشكل والمقياس المرتبطة بالقيم الحتمية.
- التوزيع المنظم المتقطع: لتوليد القيم ضمن مجال انحراف محدد حول القيمة الحتمية بنسبة $(\omega = 0.25)$.

آلية التحديث الديناميكي:

اعتمدت المحاكاة نهجاً تكرارياً؛ حيث تُستخدم القيم العشوائية المتولدة عند الزمن t كمدخلات لحساب حالة النظام عند الزمن $t+1$ ، مما ينتج سلسلة زمنية مترابطة تعكس التطور الوبائي العشوائي.

المرحلة الرابعة: تقدير المعلمات وتقييم الأداء

بعد توليد السلاسل الزمنية العشوائية، تم تطبيق ثلاث طرائق تقدير لاسترجاع معلمات النموذج (α) ، β ، γ وهي:

- طريقة الإمكان الأعظم. (MLE)
- مرشح كالمان الموسع. (EKF)
- الاستدلال البايزي باستخدام خوارزميات ماركوف مونت كارلو. (Bayesian–MCMC)

وجرت المقارنة بين هذه الطرائق اعتماداً على مقاييس الدقة الإحصائية، ولاسيما جذر متوسط مربع الخطأ (RMSE)، بهدف تحديد الطريقة الأكثر كفاءة ودقة في تقدير معلمات نموذج SEIR العشوائي.



4-3 نتائج المحاكاة Simulation Results

أُجريت تجارب المحاكاة بالاعتماد على منهجية التوليد الموضحة في المراحل السابقة، وذلك ضمن إطار نمذجة ديناميكيات الأوبئة باستخدام نموذج SEIR العشوائي بهدف إجراء تحليل مقارن لطرائق تقدير معالم النموذج. وقد نُفذت التجارب تحت مجموعة من السيناريوهات المختلفة ممثلة بمتغير Scenario (High, Low, True)، ومع أطوال زمنية متعددة للسلاسل ممثلة بالمتغير T (30، 50، 100، 150)، إضافة إلى استخدام توزيعات احتمالية متنوعة ممثلة بالمتغير Distribution (Poisson، Negative Binomial، Uniform Discrete، Gamma).

بعد توليد البيانات لكل توليفة من هذه المتغيرات، تم تطبيق ثلاث طرائق لتقدير معالم نموذج SEIR العشوائي، وهي: طريقة الإمكان الأعظم (MLE)، ومرشح كالمان الموسع (EKF)، والطريقة البايزية (Bayesian-MCMC). ثم جرى تقييم دقة التقدير باستخدام مقياس الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الخطأ (RMSE)، مع تحديد الطريقة الأفضل في كل تجربة ضمن متغير Best Method.

وقد عُرضت نتائج المقارنة في الجداول (1-3)–(2-3) وفق تنظيم يعتمد على:

1. طريقة التقدير الإحصائية،
 2. نوع التوزيع الاحتمالي،
 3. طول السلسلة الزمنية T،
- مع اعتماد معيار RMSE أساساً للمفاضلة.

النتائج العامة للمقارنة

أظهرت نتائج المحاكاة تفوق الطريقة البايزية بصورة واضحة، إذ حققت المرتبة الأولى في 45 تجربة من أصل 48 وفق متغير Best Method، في حين ظهرت طريقة EKF كأفضل طريقة في ثلاث تجارب فقط، بينما لم تحقق طريقة MLE المرتبة الأولى في أي تجربة. ويشير ذلك إلى أن الطرائق البايزية أكثر قدرة على التقاط ديناميكية النظام الوبائي العشوائي وأكثر استقراراً مقارنة بالطرائق النقطية أو التقريبية، خاصة في ظل تغير السيناريوهات وطبيعة التوزيعات الاحتمالية.

كما بيّنت النتائج وجود اتجاه عام يتمثل في انخفاض قيمة RMSE مع زيادة طول السلسلة الزمنية T، أي مع تزايد حجم البيانات المتاحة. فعلى مستوى المتوسطات الكلية، انخفض متوسط RMSE للطريقة البايزية من نحو 0.325 عند T = 30 إلى نحو 0.154 عند T = 150، مع ملاحظة نمط انخفاض مماثل في طريقتي MLE وEKF، مما يؤكد أن زيادة حجم البيانات تسهم في تحسين كفاءة التقدير وتقليل عدم اليقين.

ومن ناحية أخرى، أظهرت المقارنة بين التوزيعات الاحتمالية أن أداء طرائق التقدير يتأثر بطبيعة التوزيع المستخدم، إلا أن الطريقة البايزية حافظت على أفضلية عامة عبر جميع التوزيعات تقريباً، وهو ما يدعم الاعتماد عليها عند التعامل مع بيانات غير غاوسية أو تتسم بتذبذب عشوائي مرتفع.

4-3-1 نتائج طرائق التقدير عند T = 30



يوضح جدول (1-3) قيم مقياس RMSE الكلي لطرائق تقدير معالم نموذج SEIR العشوائي عند طول سلسلة زمنية قدره $T = 30$ ، وعبر مختلف السيناريوهات والتوزيعات الاحتمالية.

وقد أظهرت النتائج تفوق الطريقة البايزية، حيث سجلت أقل متوسط خطأ كلي بلغ **0.3253**، مقارنة بـ **0.3797** لطريقة EKF و **0.4233** لطريقة MLE. كما حققت الطريقة البايزية المرتبة الأولى في **11** تجربة من أصل **12** ضمن هذا المستوى الزمني، في حين ظهرت طريقة EKF كأفضل طريقة في تجربة واحدة فقط، بينما لم تحقق طريقة MLE أفضلية ضمن هذا المعيار.

وتؤكد هذه النتائج أن المنهج البايزي يتمتع بكفاءة أعلى في تقدير معالم نموذج SEIR العشوائي عندما تكون السلاسل الزمنية قصيرة نسبياً، نظراً لقدرته على استيعاب عدم اليقين والاستفادة من البنية الاحتمالية الكاملة للنموذج.

Scenario	Distribution	RMSE_overall_MLE	RMSE_overall_EKF	RMSE_overall_Bayes	Best_method
High	Gamma	0.7892	0.6583	0.5901	Bayes
High	Negbin	0.7955	0.6947	0.5966	Bayes
High	Poisson	0.7323	0.74	0.5993	Bayes
High	Unifdisc	0.768	0.6853	0.5707	Bayes
Low	Gamma	0.0389	0.0342	0.0313	Bayes
Low	Negbin	0.0304	0.0258	0.0252	Bayes
Low	Poisson	0.0319	0.0298	0.0262	Bayes
Low	Unifdisc	0.036	0.0287	0.029	Bayes
True	Gamma	0.4725	0.4472	0.3494	Bayes
True	Negbin	0.4205	0.3846	0.3413	Bayes
True	Poisson	0.5037	0.4045	0.3829	EKF
True	Unifdisc	0.461	0.4239	0.3615	Bayes

جدول (1-3) يبين نتائج طرائق التقدير عندما يكون طول السلسلة الزمنية $T=30$

3-4-2 نتائج طرائق التقدير عند $T = 50$

يوضح جدول (3-2) نتائج $RMSE_overall$ عند $T = 50$ وتُظهر النتائج تحسناً عاماً في دقة التقدير مقارنة بحالة $T = 30$ ، إذ انخفض متوسط الخطأ الكلي لجميع الطرائق وقد بقيت **Bayes** الأفضل أداءً بمتوسط $RMSE_overall = 0.2455$ ، مقابل **0.2748** لطريقة EKF و **0.3146** لطريقة MLE. والأهم أن **Bayes** كانت الأفضل في جميع التجارب (12 من 12) عند هذا الطول الزمني، مما يشير إلى استقرارها العالي عند توفر بيانات أكثر نسبياً.

Scenario	Distribution	RMSE_overall_MLE	RMSE_overall_EKF	RMSE_overall_Bayes	Best_method
High	Gamma	0.5333	0.4171	0.4355	Bayes
High	Negbin	0.574	0.5205	0.4534	Bayes



High	Poisson	0.5996	0.5145	0.4553	Bayes
High	Unifdisc	0.539	0.5157	0.4122	Bayes
Low	Gamma	0.0001	0.0001	0.0001	Bayes
Low	Negbin	0.0001	0.0001	0.0001	Bayes
Low	Poisson	0.0001	0.0001	0.0001	Bayes
Low	Unifdisc	0.0001	0.0001	0.0001	Bayes
True	Gamma	0.3878	0.3244	0.2939	Bayes
True	Negbin	0.3684	0.3085	0.2681	Bayes
True	Poisson	0.3664	0.3346	0.3044	Bayes
True	Unifdisc	0.4069	0.3619	0.3231	Bayes

جدول (2-3) يبين نتائج طرائق التقدير عندما يكون طول السلسلة الزمنية $T=50$

3-4-3 نتائج طرائق التقدير عند $T = 100$

يبين جدول (3-3) قيم $RME_{overall}$ عند $T = 100$ حيث يستمر الاتجاه نفسه بانخفاض الخطأ مع زيادة طول السلسلة الزمنية. بلغ متوسط $RMSE_{overall}$ لطريقة Bayes نحو 0.1908، مقابل 0.2148 لطريقة EKF و 0.2468 لطريقة MLE كما سُجلت أفضلية Bayes في 11 تجربة ضمن $T = 100$ ، بينما ظهرت EKF كأفضل طريقة في تجربة واحدة فقط، ولم تظهر MLE كأفضل طريقة.

Scena	Distribu	RMSE_overall	RMSE_overall	RMSE_overall_	Best_met
rio	tion	_MLE	_EKF	Bayes	hod
High	Gamma	0.4855	0.387	0.3819	Bayes
High	Negbin	0.4135	0.3512	0.3063	Bayes
High	Poisson	0.4104	0.3506	0.3341	Bayes
High	Unifdisc	0.5011	0.4239	0.3926	Bayes
Low	Gamma	0.0001	0.0001	0.0001	Bayes
Low	Negbin	0.0001	0.0001	0.0001	EKF
Low	Poisson	0.0001	0.0001	0.0001	Bayes
Low	Unifdisc	0.0001	0.0001	0.0001	Bayes
True	Gamma	0.308	0.2969	0.2283	Bayes
True	Negbin	0.2798	0.2388	0.2215	Bayes
True	Poisson	0.2789	0.2745	0.2117	Bayes
True	Unifdisc	0.2836	0.2539	0.2133	Bayes

جدول (3-3) يبين نتائج طرائق التقدير عندما يكون طول السلسلة الزمنية $T=100$

3-4-4 نتائج طرائق التقدير عند $T = 150$

تعرض نتائج $T = 150$ (ضمن امتداد الجداول نفسها بحسب تنظيم الفصل) أفضل مستوى للدقة بين جميع القيم المدروسة، وهو أمر متوقع لأن زيادة نقاط الرصد تقلل عدم اليقين وتحسن التقدير فقد بلغ متوسط $RMSE_{overall}$ لطريقة Bayes حوالي 0.1536 مقابل 0.1717 لطريقة EKF و 0.1919 لطريقة



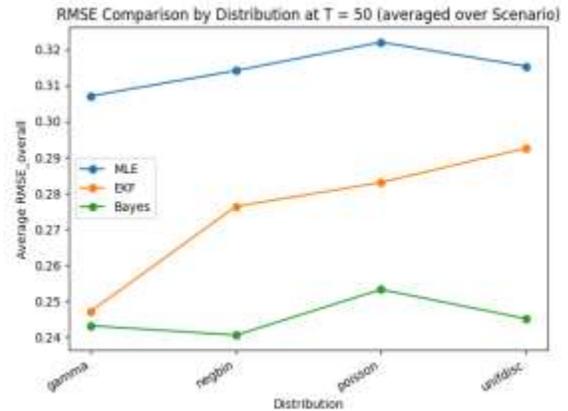
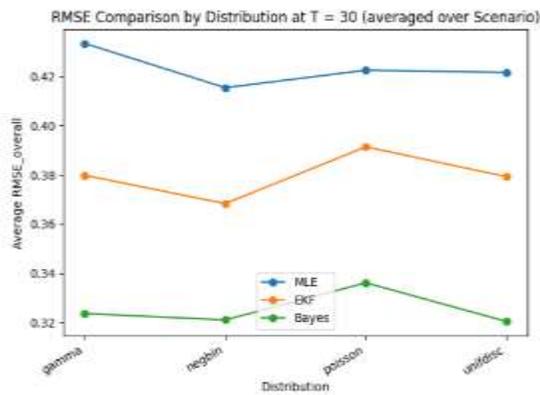
MLE كما حافظت Bayes على الأفضلية في 11 تجربة من أصل 12 مع ظهور EKF كأفضل طريقة في تجربة واحدة فقط.

Scenario	Distribution	RMSE_overall_MLE	RMSE_overall_EKF	RMSE_overall_Bayes	Best_method
High	Gamma	0.3274	0.321	0.2665	Bayes
High	Negbin	0.3236	0.2763	0.2556	Bayes
High	Poisson	0.3347	0.2954	0.2666	Bayes
High	Unifdisc	0.3485	0.3174	0.265	Bayes
Low	Gamma	0.0001	0.0001	0.0001	Bayes
Low	Negbin	0.0001	0.0001	0.0001	Bayes
Low	Poisson	0.0001	0.0001	0.0001	Bayes
Low	Unifdisc	0.0001	0.0001	0.0001	Bayes
True	Gamma	0.2255	0.2043	0.2012	Bayes
True	Negbin	0.2382	0.1998	0.1857	EKF
True	Poisson	0.2478	0.2122	0.1981	Bayes
True	Unifdisc	0.2569	0.2337	0.2043	Bayes

أشكال المقارنة بين طرائق التقدير عند أحجام العينات المختلفة (T)

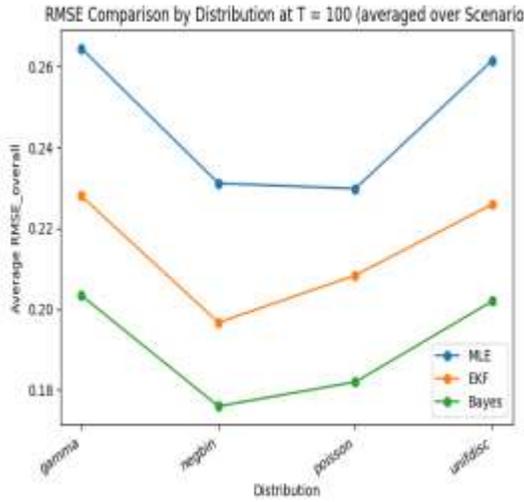
T = 30

T = 50

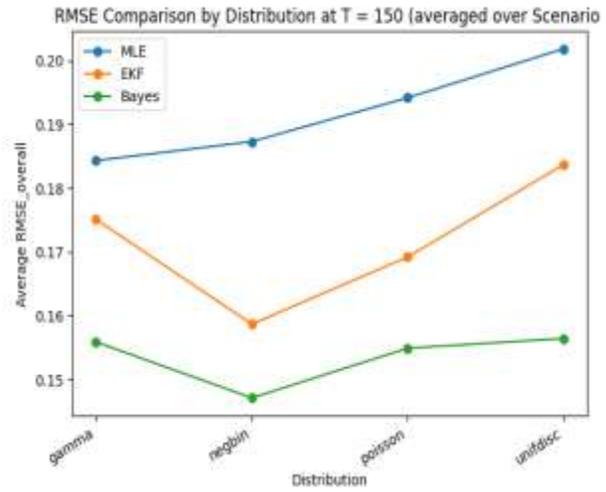




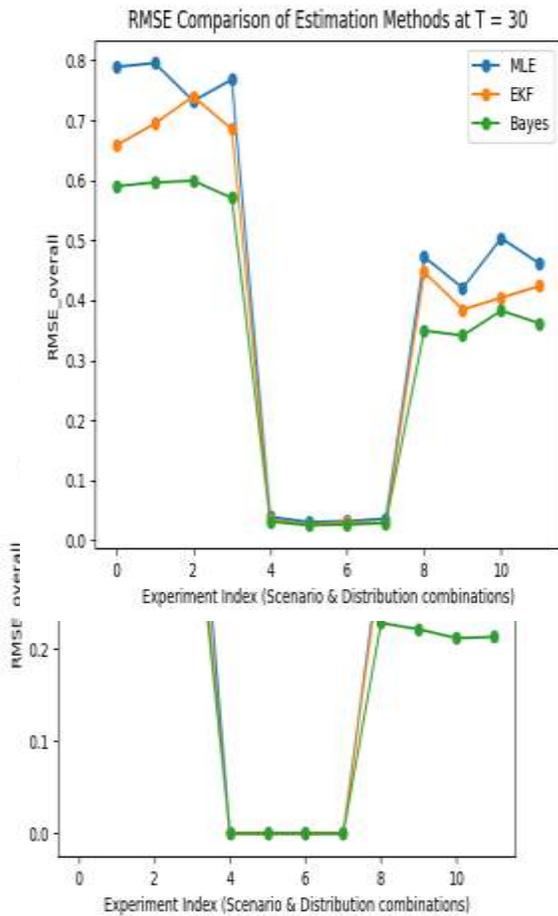
T = 100



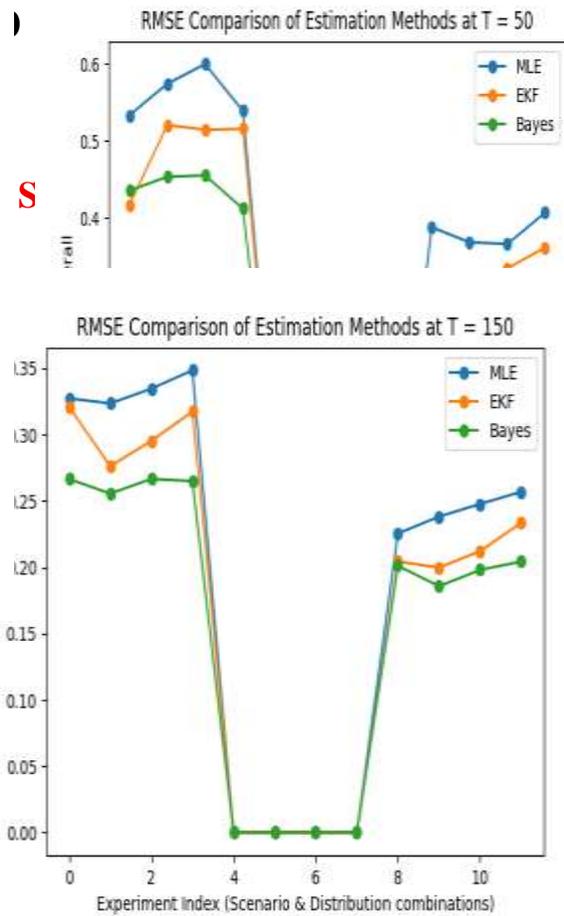
T = 150



T = 30



T = 50



S

0
3



الأكثر ملاءمة لتقدير معلمات نموذج SEIR العشوائي، خصوصاً في الحالات التي تكون فيها البيانات محدودة أو ذات تشتت مرتفع.

3- تحليل نتائج المحاكاة حسب حجم العينة ونوع التوزيع

تستعرض الفقرات الآتية التحليل التفصيلي لنتائج المحاكاة لكل حجم عينة، حيث يمثل حجم العينة طول السلسلة الزمنية T . وقد تم تقسيم النتائج وفقاً لنوع التوزيع الاحتمالي المعتمد في توليد البيانات، بهدف تقييم أداء طرائق التقدير تحت افتراضات توزيعية مختلفة.

القيم المعروضة تمثل متوسط مؤشر الخطأ الجذري التربيعي الكلي ($RMSE_{overall}$) محسوباً عبر جميع السيناريوهات (Scenarios) ضمن كل توزيع احتمالي. ويهدف هذا الإجراء إلى تحقيق مقارنة منهجية عادلة بين طرائق التقدير الثلاث: طريقة الإمكان الأعظم (MLE)، مرشح كالمان الممتد (EKF)، والمنهج البايزي (Bayesian Estimation)، من خلال توحيد معيار التقييم وتجنب تحيز النتائج نحو سيناريو معين.

3-4-1 التحليل التفصيلي عند $T=30$

التوزيع الاحتمالي	MLE	EKF	Bayes	Best method
gamma	0.4335	0.3799	0.3236	Bayes
negbin	0.4155	0.3684	0.3210	Bayes
Poisson	0.4226	0.3914	0.3361	Bayes
unifdisc	0.4217	0.3793	0.3204	Bayes

الجدول رقم () يبين نتائج طرائق التقدير عند $T=30$

تشير نتائج المحاكاة إلى أن قيم $RMSE_{overall}$ تبدأ بالانخفاض تدريجياً مع زيادة طول السلسلة الزمنية T مما يعكس تحسناً دقة التقدير كلما توفرت معلومات زمنية أطول. وعند الحجم $T = 30$ ، أظهرت الطريقة البايزية أفضل أداء نسبي بين طرائق التقدير الثلاث، إذ حققت أقل متوسط لقيم الخطأ عبر مختلف التوزيعات الاحتمالية المستخدمة في توليد البيانات، مقارنة بكلٍ من طريقة الإمكان الأعظم (MLE) ومرشح كالمان الممتد (EKF).

وتدل هذه النتيجة على أن المنهج البايزي يمتلك قدرة أعلى على احتواء عدم اليقين في المعلمات عند الأحجام الزمنية الصغيرة نسبياً، مما يمنحه ميزة واضحة في ظروف البيانات المحدودة.

3-4-2 التحليل التفصيلي عند $T=50$

بالاعتماد على جدول المقارنة والشكل البياني الخاص بالحجم $T = 50$ ، يمكن تلخيص نتائج الأداء وفقاً لكل توزيع احتمالي على النحو الآتي:

التوزيع الاحتمالي	MLE	EKF	Bayes	Best method
gamma	0.3071	0.2472	0.2432	Bayes
negbin	0.3141	0.2763	0.2405	Bayes
Poisson	0.3220	0.2830	0.2532	Bayes
unifdisc	0.3153	0.2926	0.2451	Bayes

الجدول رقم () بين نتائج طرائق التقدير عند $T=50$

تُظهر النتائج استمرار تحسّن دقة التقدير مع زيادة طول السلسلة الزمنية، حيث تنخفض قيم $RMSE_{overall}$ مقارنةً بالأحجام الأصغر. كما يتضح أن الطريقة البايزية تحقق أدنى متوسط لقيم الخطأ عبر مختلف التوزيعات الاحتمالية عند هذا الحجم، متفوقةً بذلك على كلٍ من طريقة الإمكان الأعظم (MLE) ومرشح كالمان الممتد.

3-4-3 التحليل التفصيلي عند $T=100$

التوزيع الاحتمالي	MLE	EKF	Bayes	Best method
-------------------	-----	-----	-------	-------------



gamma	0.2645	0.2280	0.2034	Bayes
negbin	0.2311	0.1967	0.1760	Bayes
Poisson	0.2298	0.2084	0.1820	Bayes
unifdisc	0.2616	0.2260	0.2020	Bayes

الجدول رقم () يبين نتائج طرائق التقدير عند T=100

تُبين نتائج المحاكاة استمرار الانخفاض الملحوظ في قيم $RMSE_{overall}$ مع زيادة طول السلسلة الزمنية T مما يؤكد العلاقة العكسية بين حجم العينة ودقة التقدير. وعند الحجم $T = 100$ ، أصبحت الفروق بين طرائق التقدير أكثر وضوحاً من حيث الاستقرار والدقة.

وقد أظهرت الطريقة البايزية أدنى متوسط لقيم الخطأ عبر مختلف التوزيعات الاحتمالية، متفوقةً على كلٍ من طريقة الإمكان الأعظم (MLE) ومرشح كالمان الممتد (EKF) ويعكس ذلك قدرتها العالية على دمج المعلومات المسبقة مع البيانات المرصودة بكفاءة أكبر كلما زاد طول السلسلة الزمنية، مما يؤدي إلى تحسين جودة التقديرات وتقليل التباين

3-4-4 التحليل التفصيلي عند T=150

التوزيع الاحتمالي	MLE	EKF	Bayes	Best method
gamma	0.1843	0.1751	0.1559	Bayes
negbin	0.1873	0.1587	0.1471	Bayes
Poisson	0.1942	0.1692	0.1549	Bayes
Unifdisc	0.2019	0.1837	0.1565	Bayes

الجدول رقم () يبين نتائج الطرائق التقدير عند T=150

تؤكد نتائج المحاكاة عند هذا الحجم استمرار الاتجاه التنازلي لقيم $RMSE_{overall}$ مع زيادة طول السلسلة الزمنية T ، مما يعكس تحسناً تدريجياً ومستقرًا في دقة التقدير كلما ازدادت المعلومات المتاحة للنموذج.

وعند $T = 150$ ، وهو أكبر حجم عينة ضمن الدراسة، بلغت قيم الخطأ أدنى مستوياتها مقارنةً بالأحجام السابقة، مما يدل على ارتفاع درجة الاستقرار التقاربي للطرائق الثلاث. ومع ذلك، استمرت الطريقة البايزية في تحقيق أقل متوسط لقيم الخطأ عبر مختلف التوزيعات الاحتمالية، متفوقةً على كلٍ من طريقة الإمكان الأعظم (MLE) ومرشح كالمان الممتد (EKF)

وتشير هذه النتيجة إلى أن التفوق النسبي للمنهج البايزي لا يقتصر على العينات الصغيرة أو المتوسطة، بل يمتد كذلك إلى الأحجام الكبيرة، حيث يجمع بين انخفاض التباين وارتفاع كفاءة التقدير، مما يعزز موثوقيته في التطبيقات العملية طويلة السلسلة الزمنية.

خلاصة عامة

بمقارنة نتائج المحاكاة عند القيم $T = 30, 50, 100, 150$ ، يتضح وجود اتجاه عام منتظم يتمثل في الانخفاض التدريجي لقيم $RMSE_{overall}$ مع زيادة طول السلسلة الزمنية. ويعكس هذا السلوك العلاقة العكسية المتوقعة بين حجم العينة ودقة التقدير، حيث تؤدي الزيادة في عدد المشاهدات الزمنية إلى تعزيز استقرار المعلمات المقدرة وتقليل التباين، ومن ثم تحسين جودة التقدير الكلي.

وعلى مستوى المقارنة بين طرائق التقدير الثلاث، أظهرت النتائج تفوقاً متسقاً للمنهج البايزي عبر جميع التوزيعات الاحتمالية المدروسة وجميع أحجام العينات. فقد حققت الطريقة البايزية أدنى متوسط لقيم الخطأ في كل الحالات تقريباً، سواء في الأحجام الصغيرة ($T = 30$) أو المتوسطة ($T = 50, 100$) (أو الكبيرة ($T = 150$)). ويشير هذا التفوق المستمر إلى قدرة المنهج البايزي على دمج المعلومات المسبقة مع البيانات المرصودة بكفاءة أعلى، مما يمنحه ميزة واضحة في التعامل مع عدم اليقين البيئي والعشوائية المصاحبة للنموذج.



وبناءً على ذلك، يمكن الاستنتاج أن زيادة طول السلسلة الزمنية تحسن أداء جميع الطرائق، إلا أن المنهج البايزي يظل الأكثر كفاءة واستقرارًا نسبيًا ضمن بيئة المحاكاة المعتمدة، مما يدعم اعتماده كخيار مفضل في تقدير معلمات النماذج الوبائية العشوائية

الفصل الرابع

الجانب الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات

1. أظهرت نتائج المحاكاة ضمن إطار نمذجة ديناميكيات الأوبئة باستخدام نموذج SEIR العشوائي تفوق المنهج البايزي بوصفه الأكثر كفاءة في تقدير معلمات النموذج مقارنة بطريقتي الإمكان الأعظم (MLE) ومرشح كالمان الموسع (EKF). فقد حققت الطريقة البايزية أدنى قيم لمقياس الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الخطأ (RMSE) عند تقدير مسارات أعداد المصابين والمتعافين، مما يدل على قدرتها الأعلى في تمثيل السلوك الديناميكي للنظام الوبائي العشوائي.
2. اتسمت خوارزمية سلاسل ماركوف مونت كارلو (MCMC) ضمن الإطار البايزي بدرجة عالية من الاستقرار في التقارب، حيث تراوحت معدلات القبول ضمن حدود مناسبة تدل على كفاءة استكشاف فضاء المعلمات. وأسهم هذا الاستقرار في تعزيز موثوقية التقديرات ودقة التنبؤات المستخلصة من النموذج العشوائي.
3. بيّنت المؤشرات الوصفية والمعلمات المقدرة للنموذج أن قيمة معامل التكاثر الأساسي كانت أقل من الواحد الصحيح ضمن فترة الدراسة، وهو ما يشير إلى اتجاه انحساري للوباء وفق الشروط المفترضة للنموذج، ويؤكد قدرة نموذج SEIR العشوائي على توصيف الاتجاه العام لديناميكيات الانتشار.
4. كشفت نتائج اختبارات ملائمة التوزيعات الاحتمالية وجود تباين زائد في بيانات الحالات الوبائية، الأمر الذي جعل توزيعي ذي الحدين السالب وغاما أكثر ملائمة من توزيع بواسون. ويؤكد ذلك أهمية اعتماد نماذج احتمالية مرنة عند تمثيل العشوائية في ديناميكيات الأوبئة.

التوصيات

1. اعتماد المنهج البايزي في نمذجة الأوبئة العشوائية:

توصي الدراسة بتبني الإطار البايزي في تقدير معلمات نماذج SEIR العشوائية نظرًا لقدرته العالية على التعامل مع عدم اليقين، ودمج المعلومات المسبقة مع البيانات المرصودة، مما يحقق تقديرات أكثر دقة واستقرارًا.

2. تحسين الدقة الزمنية للبيانات الوبائية:

تشير النتائج إلى أن استخدام بيانات زمنية ذات دقة أعلى (يومية أو أسبوعية) من شأنه تعزيز كفاءة التقدير وتقليل الاعتماد على التقسيم العددي في المحاكاة، مما يحسن توصيف التغيرات السريعة في ديناميكيات الانتشار.

3. اختيار توزيعات احتمالية ملائمة للبيانات العشوائية:



تؤكد الدراسة ضرورة استخدام توزيعات قادرة على تمثيل التباين الزائد في بيانات الإصابات، مثل التوزيع ذي الحدين السالب أو التوزيعات المستمرة المناسبة، بدلاً من افتراض توزيع بواسون الذي قد يؤدي إلى تقديرات متحيزة.

٤. المراقبة المستمرة لمؤشرات الانتشار:

توصي الدراسة بمتابعة دورية لمعلمات النموذج الأساسية، ولا سيما معدلات الانتقال والتعافي، لما لها من دور حاسم في تحديد مسار الوباء وإمكانية حدوث موجات انتشار جديدة.

٥. توسيع النموذج ليشمل عوامل تدخل إضافية:

من المفيد في الدراسات المستقبلية تطوير نموذج SEIR العشوائي ليشمل تأثير برامج التطعيم والتدخلات الصحية وغير الدوائية، سواء عبر جعل بعض المعلمات دوالاً زمنية أو إضافة مقصورات جديدة، بما يعزز القدرة التفسيرية للنموذج ويدعم استخدامه في صنع القرار الصحي.

- [1] V. K. Chandrasekar and M. Lakshmanan, "Dynamical modelling and analysis of COVID-19 in India," *Curr. Sci.*, vol. 120, no. 8, pp. 1342–1349, 2021, doi: 10.18520/cs/v120/i8/1342-1349.
- [2] N. S. Rustum and S. A. S. Al-temimi, "Estimation of the epidemiological model with a system of differential equations (SIRD) using the Runge-Kutta method in," vol. 13, no. February, pp. 2807–2814, 2022.
- [3] S. M. Dadoa, "MATHEMATICAL MODELING OF SEIR MODEL WITH College of Science," 2022.
- [4] E. Taghizadeh and A. Mohammad-Djafari, "SEIR Modeling, Simulation, Parameter Estimation, and Their Application for COVID-19 Epidemic Prediction," p. 18, 2022, doi: 10.3390/psf2022005018.
- [5] M. Aakash, C. Gunasundari, and Q. M. Al-Mdallal, "Mathematical modeling and simulation of SEIR model for COVID-19 outbreak: A case study of Trivandrum," *Front. Appl. Math. Stat.*, vol. 9, 2023, doi: 10.3389/fams.2023.1124897.
- [6] N. Chitnis, "Introduction to SEIR Models," *Swiss Trop. Public Heal. Inst.*, no. May, pp. 1–48, 2017.
- [7] N. Khairani, T. Malasari Siregar, S. Frisnoiry, S. Manullang, and N. Indah Hasibuan, "SEIR Model in Spread Disease," vol. 1, no. 2021, 2022, doi: 10.4108/eai.11-10-2022.2325320.
- [8] E. Tornatore, S. M. Buccellato, and P. Vetro, "Stability of a stochastic SIR system," *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 354, no. 1–4, pp. 111–126, 2005, doi: 10.1016/j.physa.2005.02.057.
- [9] D. Wanduku and C. Rahul, "Complete maximum likelihood estimation for SEIR epidemic models: theoretical development," no. July, pp. 1–54, 2019,



- [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1907.10679>
[10] D. N. Rusatsi, *Bayesian Analysis of SEIR epidemic models*. 2015.