

<https://doi.org/10.31272/jae.i150.1463><https://admics.uomustansiriyah.edu.iq/index.php/admecco>

P-ISSN: 1813-6729 E-ISSN: 2707-1359

JAE

مقدرات معلمات توزيع ويبيل لبيانات تليف الكبد الضبابية بطريقتي الامكان الاعظم وبيز

اسماء ناجي هاشم

قسم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة المستنصرية، بغداد، العراق.

Email: asmaa.hashim@uomustansiriyah.edu.iq ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0004-2508-5351>

فراس منذر جاسم

قسم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة المستنصرية، بغداد، العراق.

Email: frasm@uomustansiriyah.edu.iq ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4948-8583>

المستخلص

تم في هذا البحث تقدير ومقارنة مقدرات معلمات توزيع ويبيل في حالة كون البيانات ضبابية تمثل مدة بقاء مرضى تليف الكبد ، وذلك باستعمال طريقتي الامكان الاعظم وطريقة بيز. اذ تم تحويل البيانات الضبابية الى بيانات تقليدية من خلال توظيف دالة الانتماء المثلثية، ومن خلال المعيارين (Log-L) والخطأ المعياري، أظهرت النتائج تفوق طريقة بيز في تحقيق تقديرات دقيقة ومستقرة لمعلمتي الشكل والقياس مقارنة بطريقة الامكان. كما أظهرت النتائج تحسن مقدرات طريقة بيز مع زيادة مستوى القطع، في حين كان أداء طريقة الامكان الاعظم متذبذباً، اذ قدمت طريقة الامكان أفضل النتائج عند مستوى القطع 0.3.

معلومات البحث

تواريخ البحث:

تاريخ تقديم البحث: 2025 / 08 / 30

تاريخ قبول البحث: 2025 / 11 / 13

تاريخ نشر الكتروني: 2025 / 11 / 01

عدد صفحات البحث 165 - 175

الكلمات المفتاحية:

تليف الكبد، توزيع ويبيل، البيانات الضبابية، الامكان الأعظم الضبابية، طريقة بيز الضبابية.

المراسلة:

أسم الباحث: فراس منذر جاسم

Email: frasm@uomustansiriyah.edu.iq

1. المقدمة

تبرز البيانات الضبابية (Fuzzy Data) في العديد من التطبيقات منها الطبية، الهندسية والاقتصادية وغيرها. ويُعتبر توزيع ويبيل (Weibull Distribution) انموذجاً مرناً لتمثيل أنماط مختلفة من البيانات [1] في كثير من التطبيقات التي تنتم البيانات بعدم الدقة أو الغموض، وقد ناقشت دراسات عديدة تقدير معلمات ويبيل لبيانات ضبابية، منها دراسة عبد الصاحب، (2019) [2]، اذ تم فيها مقارنة بعض مقدرات طريقتي الامكان الاعظم وبيز باستعمال المحاكاة، ودراسة [3] (2013) Pak et al.، في هذه الدراسة تم ايجاد ومقارنة تقديرات طريقة الامكان وطريقة العزوم في معلمات توزيع ويبيل في حالة البيانات الضبابية. في هذا البحث سيتم مقارنة الطريقتين في تقدير معلمات توزيع ويبيل في حالة بيانات تليف الكبد، والتي توصف بكونها غير مؤكدة بالنظر لتضارب التقديرات بين تقديرات الاطباء وسجلات المستشفى والمقابلات مع المرضى او مع ذويهم في مدة ضبابية بقاء مرضى مصابين بتليف الكبد، على امل ان يسهم ذلك في دعم القرارات الطبية في ظل عدم اليقين.

2. مشكلة البحث

يعاني كثير من الأشخاص من مرض تليف الكبد وهو من الأمراض المزمنة التي تُسبب تدهوراً تدريجياً في وظائف الكبد نتيجة تلف الخلايا وتكون الأنسجة اللبية، ناهيك عن التفاوت في دقة المصادر التي يتم من خلالها الحصول على التوثيق الزمني لمدة بقاء المرض، لذلك سيتم في هذا البحث توظيف طريقة الامكان الاعظم وطريقة بيز في تقدير معلمتي الشكل والقياس لبيانات ضبابية تمثل مدة بقاء مرض تليف الكبد طبيعة البيانات الضبابية.

3. هدف البحث

يهدف هذا البحث إلى ايجاد كلا من تقديرات لمعلمات ودالة بقاء توزيع ويبيل في ظل وجود بيانات ضبابية، مع التركيز على بيانات طبية تمثل مدة بقاء مرضى مصابين بتليف الكبد، والتي تنتم بدرجة من عدم التيقن بسبب تنوع مصادر ها. وتحقيقاً لهذا الهدف، سيتم ايجاد تقديرات كلا من معلمات ودالة بقاء توزيع ويبيل بطريقتي الامكان الاعظم وبيز، ومن ثم المقارنة بين تلك المقدرات للحصول على خصائص تتلاءم مع طبيعة البيانات الضبابية.

4. دالة الانتماء المثلثية: Triangular Membership Function

عبارة عن دالة خطية و تُعد من أكثر دوال الانتماء استعمالاً في تمثيل المتغيرات الضبابية، نظراً لبساطتها وسهولة التعامل معها رياضياً. وتُستخدم خصوصاً عندما تكون البيانات أو القيم المراد تمثيلها تمتلك ذروة واضحة. تُحدد هذه الدالة بوساطة ثلاث معلمات [5,4]:

d : الحد الأدنى، (بداية الانتماء)، e : القيمة المركزية، (أعلى درجة انتماء = 1)، f : الحد الأعلى، (نهاية الانتماء).
وتُعطى دالة الانتماء المثلثية للعنصر t بالشكل التالي:

$$\mu_{\bar{A}}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq d \\ \frac{t-d}{e-d} & d < t \leq e \\ \frac{f-t}{f-e} & e < t \leq f \\ 1 & t \geq f \end{cases} \quad (1)$$

5. توزيع ويبيل: Weibull Distribution

يُعد توزيع ويبيل من التوزيعات الشائعة في تحليل بيانات الموثوقية، وقد أثبت مرونته في تمثيل سلوك الفشل المتزايد أو المتناقص، وتم توسيع توظيف توزيع ويبيل ليشمل البيانات الضبابية، لمرونته في تمثيل الغموض وعدم اليقين في القيم المدخلة والمعلمات. وتعرف دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) لتوزيع ويبيل وفق المعادلة الآتية [7,6]:

$$f(t; \omega, \theta) = \frac{\theta}{\omega} \left(\frac{t}{\omega}\right)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{t}{\omega}\right)^{\theta}}, \quad t \geq 0, \omega, \theta > 0 \quad (2)$$

اذ ان: ω : معلمة القياس (Scale parameter)، θ : معلمة الشكل (Shape parameter).

6. طريقة الإمكان الأعظم الضبابية: Fuzzy Maximum Likelihood Estimation

تأتي طريقة الإمكان الأعظم (ML) في مقدمة الطرائق التي توظف في عملية التقدير، وتعد أبرز الأساليب الإحصائية الواسعة الانتشار في تقدير معلمات النماذج الاحتمالية، وان ابرز ما يميز هذه الطريقة هو خاصية الثبات (Invariance). تعرف دالة الامكان (Likelihood Function) لعينة تقليدية من مشاهدات توزيع ويبيل، على النحو الآتي [8,3]:

$$L(\theta, \omega | t) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \theta, \omega) \quad (3)$$

$$L(\theta, \omega | t) = \text{Ln} \left[\prod_{i=1}^n \frac{\theta}{\omega} \left(\frac{t_i}{\omega}\right)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\omega}\right)^{\theta}} \right] \quad (4)$$

$$\text{Ln } L(\theta, \omega | t) = \sum_{i=1}^n \left[\text{Ln} \left(\frac{\theta}{\omega}\right) + (\omega - 1) \text{Ln} \left(\frac{t_i}{\omega}\right) - \left(\frac{t_i}{\omega}\right)^{\theta} \right] \quad (5)$$

وبإخذ المشتقة الاولى لكل من θ و ω ومساواة المشتقة بالصفر وتبسيط الحدود، نحصل على:

$$\frac{n}{\hat{\theta}} = n \text{Ln}(\hat{\omega}) - \sum_{i=1}^n \text{Ln}(t_i) + \sum_{i=1}^n \text{Ln} \left(\frac{t_i}{\hat{\omega}}\right)^{\hat{\theta}} \text{Ln} \left(\frac{t_i}{\hat{\omega}}\right) \quad (6)$$

$$n \hat{\omega} = \theta \sum_{i=1}^n \text{Ln} \left(\frac{t_i}{\hat{\omega}}\right)^{\hat{\theta}} \quad (7)$$

وعند التعامل مع بيانات ضبابية تُعدّل دالة الإمكان التقليدية، لتشمل دوال الانتماء الخاصة بكل مشاهدة مما يُتيح تمثيلاً أفضل لطبيعة البيانات الفعلية، وفي حالة تمثيل البيانات الضبابية بدول انتماء مثلثية، عندها فان مشاهدات العينة الضبابية المثلثية ستكون $\tilde{t}_i = (d_i, e_i, f_i)$ ، مما يؤدي الى صعوبة ايجاد تقديرات بطريقة الامكان الاعظم التقليدية، لذلك يتم اللجوء الى ايجاد حلول بديلة ومنها توظيف خوارزمية التوقع والتعظيم (EM) (Expectation-Maximization)، وذلك لايجاد حلول عددية ملائمة للصيغ المعقدة وللضبابية على حد سواء. الفكرة الرئيسية لخوارزمية (EM)، تتلخص بالمراحل الآتية:

1.6. التهيئة:

وتتضمن:

أ. اختيار قيم ابتدائية للمعلمات ولتكن $\omega^{(0)}, \theta^{(0)}$ ، يمكن استخلاص القيم الابتدائية من خلال متوسط البيانات الضبابية او من دراسات سابقة.

ب. اختيار عتبة تقارب صغيرة جداً ولتكن (ϵ) ، لتحديد توقف الخوارزمية.

ج. اختيار عدد التكرارات (k) ، لتجنب التكرار اللانهائي.

2.6. التوقع (E-step):

يتم ايجاد التوقع الشرطي لدالة الإمكان الجزئية الكاملة مع مراعاة بنية الانتماء الضبابية، وذلك عند كل خطوة (k) وبالاعتماد على المعادلة (2) .

3.6. التعظيم (M-step):

يتم تعظيم الإمكان الشرطي الناتج عن خطوة التوقع للحصول على تقديرات جديدة للمعلمات. وتتطلب هذه الخطوة استعمال خوارزميات عديدة مثل طريقة نيوتن-رافسون (Newton Raphson) لحل المعادلات غير الخطية .

ويمكن توضيح الية الحصول على تقديرات الامكان الاعظم لمعلمتي توزيع ويبل (θ) و (ω) بالاعتماد على خوارزمية (EM)، على النحو الاتي:

من خلال الخطوات التكرارية مع الأخذ بعين الاعتبار القيم الأولية لكل من $\theta^{(0)}$ و $\omega^{(0)}$ ، وفي مرحلة التوقع، فان التوقعات الشرطية المعرفة في المعادلة (2) للتكرار $(k + 1)$ سيكون:

$$E_{1i} = E \omega^k, \theta^k (t^\omega | \tilde{t}) = \frac{\int_0^\infty \tilde{t}_i^{(2\omega^k)-1} \exp\left(-\frac{\tilde{t}_i^\theta}{\omega}\right) \mu_{\tilde{t}_i}(t) dt}{\int_0^\infty \tilde{t}_i^{(2\omega^k)-1} \exp\left(-\frac{\tilde{t}_i^\theta}{\omega}\right) \mu_{\tilde{t}_i}(t) dt} \quad (8)$$

$$E_{2i} = E \omega^k, \theta^k (Ln t^\omega | \tilde{t}) = \frac{\int_0^\infty \tilde{t}_i^{(\omega^k)-1} Ln(t) \exp\left(-\frac{\tilde{t}_i^\theta}{\omega}\right) \mu_{\tilde{t}_i}(t) dt}{\int_0^\infty \tilde{t}_i^{(\omega^k)-1} \exp\left(-\frac{\tilde{t}_i^\theta}{\omega}\right) \mu_{\tilde{t}_i}(t) dt} \quad (9)$$

$$E_{3i} = E \omega^k, \theta^k (t Ln t^\omega | \tilde{t}) = \frac{\int_0^\infty \tilde{t}_i^{(2\omega^k)-1} Ln(t) \exp\left(-\frac{\tilde{t}_i^\theta}{\omega}\right) \mu_{\tilde{t}_i}(t) dt}{\int_0^\infty \tilde{t}_i^{(\omega^k)-1} \exp\left(-\frac{\tilde{t}_i^\theta}{\omega}\right) \mu_{\tilde{t}_i}(t) dt} \quad (10)$$

وباستبدال الطرف الايمن من المعادلتين (6) و (7) بالتوقعات الشرطية، نحصل على:

$$\frac{n}{\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^n E_{1i} \quad (11)$$

$$n \hat{\omega} = \hat{\theta} \sum_{i=1}^n |E_{3i} - E_{2i}| \quad (12)$$

ولتطبيق مرحلة التعظيم فان ذلك يتطلب ايجاد حلول للمعادلتين (11) و (12)، للحصول على $\theta^{(k+1)}$ و $\omega^{(k+1)}$ ، وعلى النحو الاتي

$$\omega^{(k+1)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n E_{1i}} \quad (13)$$

$$\theta^{(k+1)} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \omega^{(k+1)} |E_{3i} - E_{2i}|} \quad (14)$$

من الجدير بالذكر ان ايجاد حلول للمعادلتين (11) و (12) يتم بطريقة نيوتن-رافسون وفي كل تكرار. عندها اذا تحقق من التقارب:

$$\|\omega^{(k+1)} - \omega^k\| < \epsilon, \|\theta^{(k+1)} - \theta^k\| < \epsilon \quad (15)$$

تتوقف العملية التكرارية، وان $\hat{\theta}_{ML} = \theta^{(k+1)}$ و $\hat{\omega}_{ML} = \omega^{(k+1)}$ تمثل مقدرات معلمات توزيع وبيبل بطريقة (ML)، فيما عدا ذلك تستمر العملية التكرارية لحين تحقق التقارب.

7. طريقة بيز الضبابية: Fuzzy Bayesian Method

طريقة بيز القياسية (Standard Bayes Method) من الطرائق الشائعة الاستعمال، وتفترض إن المعلمات المراد تقديرها هي متغيرات عشوائية لابد من توفر معلومات أولية حولها، بحيث يتم تمثيل تلك المعلومات الأولية على شكل دالة كثافة احتمالية تعرف بالتوزيع السابق (Prior Distribution)، ثم يتم دمج التوزيع السابق بدالة الإمكان (Likelihood Function) لملاحظات المتغير العشوائي من خلال صيغة بيز العكسية (Inverse Bayes Formula)، عندها يتم الحصول دالة التوزيع اللاحق (Posterior Distribution) وفق الصيغة الآتية [11,10,9,7]:

$$\pi(\beta|t) = \frac{L(t|\beta) \pi(\beta)}{\int_{\forall \omega} L(t|\beta) \pi(\beta) d\beta} \quad (16)$$

اذ إن: $L(t|\beta)$: تمثل دالة الإمكان لعينة بحجم (n) من مشاهدات المتغير العشوائي (t) ، $\pi(\beta)$: تمثل التوزيع السابق للمعلمة (β) ، $\pi(\beta|t)$: تمثل التوزيع اللاحق للمعلمة (β) .

ان التقدير وفق طريقة بيز القياسية يتطلب توظيف ما يعرف بدوال الخسارة (Loss Functions) والتي يرمز لها بالرمز $L(\hat{\beta}, \beta)$ ، وان التوقع الرياضي لدالة الخسارة يعبر عنه رياضياً كما يأتي:

$$Risk(\hat{\beta}, \beta) = E\{L(\hat{\beta}, \beta)\} = \int_{\forall \omega} L(\hat{\beta}, \beta) \pi(\beta|t) d\beta \quad (17)$$

وان مقدر طريقة بيز القياسية للمعلمة (β) هو المقدار الذي يجعل دالة المخاطرة أقل ما يمكن. مما تقدم فإن التقدير بطريقة بيز القياسية تعتمد بشكل كبير اختيار كلا من دالة التوزيع السابق ودالة الخسارة. [12]

1.1. التوزيع السابق: Prior Distribution

ان المعيار الذي يتم بموجبه اختيار التوزيعات السابقة الملائمة، هو طبيعة المعلومات الأولية المتوافرة حول المعلمة المراد تقديرها، سواء كانت تلك المعلومات تمثل تجارب سابقة او تجارب مستنبطة من الظاهرة المدروسة. وهناك عدة أنواع من التوزيعات السابقة، في هذه البحث سنكتفي بحالة عدم توفر معلومات أولية حول المعلمة المراد تقديرها، عندها فإن احد اساليب اختيار دالة التوزيع السابق يتم استناداً الى صيغة (Jeffery)، اي اختيار التوزيع السابق بالاعتماد على مجال المعلمة، فإذا كانت المعلمة المراد تقديرها (β) تمتلك مجالاً موجباً $(0, \infty)$ ، فإن التوزيع السابق يتبع توزيعاً لوغاريتمياً منتظماً، أي إن: [10]

$$\pi(\beta) \propto \frac{1}{\beta} \Rightarrow \pi(\beta) = \frac{c}{\beta} \quad , c, \beta > 0 \quad (18)$$

وان دالة التوزيع السابق المشتركة ستكون:

$$\pi(\theta, \omega) = \pi(\theta)\pi(\omega) \propto \frac{1}{\theta \omega} \quad , \theta, \omega > 0 \quad (19)$$

2.2. التوزيع اللاحق: Posterior Distributions

يمكن إيجاد التوزيع اللاحق للمعلمتين (θ) و (ω) وليكن $P(\theta, \omega|t)$ ، ذلك بتعويض المعادلات (19) و (4) في المعادلة (16)، ولكون البيانات ضبابية فيتم استبدال دالة الامكان التقليدية بدالة الامكان الضبابية، وعلى النحو الآتي: [10].

$$L(\theta, \omega|\tilde{t}) = \prod_{i=1}^n \int_0^{\infty} \mu_{\tilde{t}_i}(t) \frac{\theta}{\omega} \left(\frac{t_i}{\omega}\right)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\omega}\right)^{\theta}} dt \quad (20)$$

عندها سيكون التوزيع اللاحق الضبابي، كما يأتي:

$$P(\theta, \omega|\tilde{t}) = \frac{L(\tilde{t}|\theta, \omega) \pi(\theta, \omega)}{\int \int_{\forall \theta \forall \omega} L(\tilde{t}|\theta, \omega) \pi(\theta, \omega) d\theta d\omega}$$

$$P(\theta, \omega|\tilde{t}) = \frac{\theta^{n-1} \omega^{-(n\theta+1)} \prod_{i=1}^n \int_0^{\infty} \mu_{\tilde{t}_i}(t) (t_i)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\omega}\right)^{\theta}} dt}{\int \int_{\forall \theta \forall \omega} \theta^{n-1} \omega^{-(n\theta+1)} \prod_{i=1}^n \int_0^{\infty} \mu_{\tilde{t}_i}(t) (t_i)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\omega}\right)^{\theta}} d\theta d\omega} \quad (21)$$

3.7. دوال الخسارة: Loss Functions

دالة الخسارة مصطلح يطلق لقياس مقدار الخسارة الناتج من اتخاذ قرار بيز عند التقدير، ودالة الخسارة قيمة حقيقية غير سالبة، فإذا كان القرار الصائب هو القيمة الحقيقية للمعلمة، فإذا رمزنا لدالة الخسارة لتقدير المعلمة (β) بالرمز $L(\hat{\beta}, \beta)$ ، عندها فان:

$$L(\hat{\beta}, \beta) > 0 \quad \forall \hat{\beta} \neq \beta, \quad L(\hat{\beta}, \beta) = 0 \quad \forall \hat{\beta} = \beta$$

ووفقاً لمعيار التماثل تقسم دوال الخسارة الى نوعين رئيسيين هما: دوال الخسارة المتماثلة (Symmetric Loss Functions) ودوال الخسارة غير المتماثلة (Asymmetric Loss Functions)، فإذا كان مقدار الخطأ المتحقق بالاتجاه الموجب مساوياً لمقدار الخطأ المتحقق بالاتجاه السالب، عندئذ يطلق على دالة الخسارة بالمتماثلة، وفي هذه البحث سيتم توظيف دالة خسارة مربع الخطأ او دالة الخسارة التربيعية (Squared Error Loss Function) (SLF) المتماثلة في تقدير المعلمات بطريقة بيز، والتي تعرف وفق الصيغة الاتية: [7],[12]

$$L_s = C(\hat{\beta} - \beta) = C(\hat{\beta} - \beta)^2, \quad K > 0 \quad (22)$$

إذا كانت $(C=1)$ فان دالة الخسارة التربيعية تكون وفقاً للصيغة الاتية:

$$L_s = L(\hat{\beta}, \beta) = (\hat{\beta} - \beta)^2, \quad C > 0 \quad (23)$$

عندها يمكن إيجاد مقدر طريقة بيز للمعلمة (β) والذي يجعل دالة المخاطرة أقل ما يمكن كما يأتي:

$$Risk(\hat{\beta}, \beta) = E(\hat{\beta} - \beta)^2 = \int_{\forall \beta} (\hat{\beta} - \beta)^2 \pi(\beta|t) d\beta$$

$$Risk(\hat{\beta}, \beta) = \hat{\beta}^2 - 2\hat{\beta} E(\beta|t) + E(\beta^2|t) \quad (24)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة (24) بالنسبة الى $(\hat{\beta})$ ومساواة الناتج بالصفر، نحصل على:

$$2\hat{\beta} - 2E(\beta|t) = 0 \quad (25)$$

عليه فان مقدر بيز للمعلمة (β) وليكن $(\hat{\beta}_B)$ هو ناتج المعادلة (25)، أي:

$$\hat{\beta}_B = E(\beta|t) \quad (26)$$

ولإثبات أن النقطة الحرجة لدالة الخسارة هي نهاية صغرى، نجد المشتقة الجزئية الثانية لطرفي المعادلة (26) بالنسبة الى المقدر $(\hat{\beta})$ وكما يأتي:

$$\frac{\partial^2 Risk(\hat{\beta}, \beta)}{\partial \hat{\beta}^2} = 2 > 0$$

مما تقدم فان مقدر بيز القياسي للمعلمة المراد تقديرها (β) بدالة خسارة تربيعية هو عبارة عن توقع التوزيع اللاحق، أي:

$$\int_{\forall \beta} \beta P(\beta|t) d\beta \quad (27)$$

ومن الجدير بالذكر، انه يمكن إيجاد مقدرات بيز لأية دالة بدلالة المعلمة (β) ولتكن $g(\beta)$ إما عن طريق التوزيع اللاحق للدالة $g(\omega)$ إذا أمكن إيجاده، أي:

$$\hat{g}(\beta)_B = \int_{\forall g(\beta)} g(\beta) \pi\{g(\beta)|t\} dg(\beta) \quad (28)$$

أو عن طريق التوزيع اللاحق للمعلمة (β) وفق الصيغة الاتية:

$$\hat{g}(\beta)_{BQ} = \int_{\forall \beta} g(\beta) \pi(\beta|t) d\beta \quad (29)$$

وللاطلاع على المزيد من التوزيعات السابقة ودوال الخسارة انظر الى المصادر [10],[12]

مما تقدم فان صيغ إيجاد تقدرات بيز الضبابية بتوزيع سابق لاطرفيها وبدالة خسارة تربيعية، وللمعلمتين (θ) و (ω) على النحو الاتي:

$$\hat{\theta}_B = E(\theta|\tilde{t}) = \int_{\forall \theta} \theta P(\theta|\tilde{t}) d\theta$$

$$\tilde{\theta}_B = \frac{\int_{\forall \theta} \theta^n \omega^{-(n\theta+1)} \prod_{i=1}^n \int_0^\infty \mu_{\tilde{t}_i}(t) (t_i)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\omega}\right)^\theta} d\theta}{\int \int_{\forall \theta \forall \omega} \theta^{n-1} \omega^{-(n\theta+1)} \prod_{i=1}^n \int_0^\infty \mu_{\tilde{t}_i}(t) (t_i)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\omega}\right)^\theta} d\theta d\omega} \quad (30)$$

$$\hat{\omega}_B = E(\omega|\tilde{t}) = \int_{\forall\omega} \omega P(\omega|\tilde{t}) d\omega$$

$$\hat{\omega}_B = \frac{\int_{\forall\omega} \theta^{n-1} \omega^{-n\theta} \prod_{i=1}^n \int_0^\infty \mu_{\tilde{t}_i}(t) (t_i)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\omega}\right)^\theta} d\omega}{\int_{\forall\theta\forall\omega} \theta^{n-1} \omega^{-(n\theta+1)} \prod_{i=1}^n \int_0^{\hat{\omega}_B^\infty} \mu_{\tilde{t}_i}(t) (t_i)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{t_i}{\omega}\right)^\theta} d\theta d\omega} \quad (31)$$

نظرًا لعدم وجود حل للتكاملات في التوزيع اللاحق، سيتم توظيف طريقة سلسلة ماركوف مونت كارلو (MCMC)، تحديداً وفق خوارزمية (Metropolis-Hastings) للتعامل مع عينات من التوزيع اللاحق [9]. ولما كان ان التوزيع اللاحق هو $P(\theta, \omega|\tilde{t})$ ، فان خطوات (MCMC) تتلخص بما يأتي:

- اختيار القيم الأولية للمعلمات ولتكن $\theta^{(0)}$ و $\omega^{(0)}$ ، ولتكن مقدرات (ML) لتكن $j = 1$.
 - توليد قيم جديدة للمعلمتين (θ, ω) ولتكن $(\theta^{(j)}, \omega^{(j)})$ من التوزيع اللاحق $P(\theta^{(j)}, \omega^{(j)}|\tilde{t})$.
 - حساب $\log[P(\theta^{(j)}, \omega^{(j)}|\tilde{t})]$ و $\log[P(\theta^{(0)}, \omega^{(0)}|\tilde{t})]$.
 - ايجاد نسبة القبول (τ) ، فاذا كانت $(\tau = 1)$ تقبل عينة التوزيع اللاحق للخطوة (j) ، اما اذا كانت $(\tau < 1)$ عندها ترفض عينة التوزيع اللاحق للخطوة (j) ويعاد توليد المعلمات، اذ ان: $\tau = \min \left[1, e^{\log\{P(\theta^{(j)}, \omega^{(j)}|\tilde{t})\} - \log\{P(\theta^{(0)}, \omega^{(0)}|\tilde{t})\}} \right]$ لتكن $j = j + 1$.
 - نقوم بتوليد قيم جديدة للمعلمتين θ, ω ولتكن $(\theta^{(j+1)}, \omega^{(j+1)})$ من التوزيع اللاحق $P(\theta^{(j)}, \omega^{(j)}|\tilde{t})$. تكرر الخطوات من 3 الى 5، بحيث ان $j = 1, 2, 3, \dots, H$.
- توقع التوزيع اللاحق سيكون عبارة عن مقدر بيز النهائي لدالة الخسارة التربيعية، وفق الصيغة الآتية:

$$\hat{\theta}_B = E[P(\theta|\omega, \tilde{t})] = \frac{1}{H-M} \sum_{j=M+1}^H \theta_j \quad (35)$$

$$\hat{\omega}_B = E[P(\omega|\theta, \tilde{t})] = \frac{1}{H-M} \sum_{j=M+1}^H \omega_j \quad (36)$$

اذ ان M تمثل عدد المشاهدات التي يتم حرقها (Burn) لإزالة تأثير القيم الابتدائية، اذ بعد عدد من التكرارات تقترب خوارزمية (Metropolis-Hastings) الاستقرار.

8. الجانب التطبيقي: Applied said

يُعد تليف الكبد (Cirrhosis) من الأمراض المزمنة الخطيرة، يتميز بتلف تدريجي في نسيج الكبد وتكوّن ندبات تعيق وظائفه الحيوية. غالبًا ما ينتج عن التهاب الكبد الفيروسي (B أو C)، أو الاستهلاك المزمن للكحول، أو الكبد الدهني غير الكحولي، وبعض الأمراض الوراثية أو المناعية تنعكس آثار المرض في مضاعفات خطيرة كفتشل الكبد، وسرطان الكبد، مما يؤدي إلى انخفاض ملحوظ في فترة بقاء المرضى على قيد الحياة. ويسبب تعدد مصادر البيانات السريرية وتفاوت دقتها، فإن نمذجة دالة البقاء للمرضى المصابين بتليف الكبد باستعمال بيانات ضبابية تُمثل خيارًا أكثر واقعية لتحليل هذه الحالة الطبية المعقدة.

تم الحصول على بيانات البقاء لـ (24) مريضًا مصابًا بتليف الكبد من سجلات مستشفى الجهاز الهضمي والكبد التعليمي في مدينة الطب ببغداد، وذلك خلال الفترة من 2022/9/15 إلى 2025/6/15. وقد سُجّلت مدة البقاء (بالأشهر) لكل مريض، إلا أن البيانات احتوت على درجة من عدم الدقة، نتيجة اختلاف مصادرها مثل السجلات الورقية، التقارير الطبية، أو مقابلات ذوي المرضى، بالإضافة إلى الغموض في تحديد تاريخ التشخيص أو ضعف توثيق السجلات. اذ ان (t_e) يمثل متوسط اوقات بقاء المرض حسب تقدير الاطباء. وقد تم تنظيم هذه البيانات في الجدول (1) ادناه لاستعمالها في التقدير الإحصائي الضبابي.

جدول (1) اوقات البقاء الضبابية لمرضى تليف الكبد

المريض	(t_e)	المريض	(t_e)	المريض	(t_e)
1	14.6	9	17.2	17	20.6
2	16.9	10	13.8	18	21.1
3	19.3	11	25.5	19	9.9
4	22.1	12	12.6	20	12.3
5	10.6	13	28.1	21	14
6	24.3	14	15.3	22	26.6
7	11.9	15	13	23	31.8

29.5	24	22.8	16	21.4	8
------	----	------	----	------	---

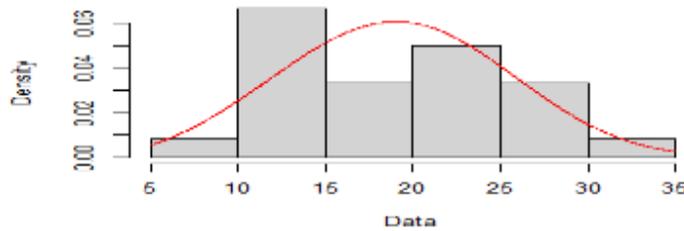
وباستعمال برنامج مكتوب بلغة R تم ايجاد نتائج الجانب التطبيقي. ولمعرفة فيما اذا كانت بيانات تليف الكبد تتبع توزيع ويبيل، تم توظيف اختبار Kolmogorov-Smirnov عند مستوى معنوية (0.05) اختبار الفرضية الاتية:
 H_0 : البيانات تتبع توزيع ويبيل
 H_1 : البيانات لا تتبع توزيع ويبيل
 والنتائج في الجدول (2) ادناه تبين ان قيم P-Value كانت اكبر من مستوى المعنوية، وهذا يعني قبول فرضية العدم اي ان بيانات تليف الكبد تتبع توزيع ويبيل.

جدول (2) اختبار حسن المطابقة لبيانات تليف الكبد الضبابية

المتغير	احصاء الاختبار	P-Value
\tilde{t}_0	0.08961	0.7727

والشكل (1) ادناه يشير الى ملائمة بيانات توزيع ويبيل النظري مع بيانات تليف الكبد.--

Empirical and theoretical dens.



شكل (1) حسن المطابقة لبيانات تليف الكبد الضبابية \tilde{t}_0

تم تضبيب البيانات باستعمال ($\alpha - cut$) لتحويل البيانات الاكثر احتمالا (متوسط تقدير الاطباء) للحصول بيانات تقليدية، اذ تم اختيار قيم معامل القطع للحصول على انتماء واسع، متوسط ومنخفض للبيانات. ($\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$). اي تم تضبيب المتغير (t_e)، وذلك بحساب درجة الانتماء لكل مشاهدة من مشاهدات المتغير، وبعتماد ($d = 8$)، ($e = 20$) و ($f = 32$)، والنتائج في الجدول (3) درجة الانتماء المثلثية $\{\mu_A(t)\}$ لقيم البقاء لمرضى تليف الكبد.

جدول (3) قيم المتغير الضبابي ودالة الانتماء

المريض	\tilde{t}_0	$\mu_A(\tilde{t}_0)$	المريض	\tilde{t}_0	$\mu_A(\tilde{t}_0)$	المريض	\tilde{t}_0	$\mu_A(\tilde{t}_0)$
1	14.62	0.5516	9	17.2	70.766	17	20.62	0.9483
2	16.9	70.741	10	13.82	0.485	18	21.1	0.9083
3	19.3	70.941	11	25.5	70.5416	19	9.9	0.1583
4	22.1	0.825	12	12.62	0.385	20	12.3	0.3583
5	10.62	0.2183	13	28.1	0.325	21	14	0.5
6	24.3	70.641	14	15.3	0.6083	22	26.62	0.4483
7	11.9	0.325	15	13.02	0.4183	23	31.82	0.015
8	21.42	70.881	16	22.8	70.766	24	29.5	0.2083

وبمقارنة درجة انتماء كل مشاهدة مع قيم معاملات القطع ($\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$)، نحصل على مجموعة البيانات المضببة، فاذا كانت قيمة درجة الانتماء اكبر او تساوي قيمة معامل القطع، فهذا يشير الى انتماء المفردة الى المتغير الضبابي. كما هو موضح في الجدول (4) ادناه.

جدول (4) البيانات المضببة عند مستويات القطع المختلفة

المري	$\tilde{t}_{0.3}$	$\mu_A(\tilde{t}_{0.3})$	$\tilde{t}_{0.5}$	$\mu_A(\tilde{t}_{0.5})$	$\tilde{t}_{0.7}$	$\mu_A(\tilde{t}_{0.7})$	المري	$\tilde{t}_{0.3}$	$\mu_A(\tilde{t}_{0.3})$	$\tilde{t}_{0.5}$	$\mu_A(\tilde{t}_{0.5})$	$\tilde{t}_{0.7}$	$\mu_A(\tilde{t}_{0.7})$
1	14.6	0.552	14.6	0.552	14.6	0.552	1	28.1	0.325	13	-	0	-
2	16.9	0.742	16.9	0.742	16.9	0.742	2	15.3	0.608	14	15.3	0.608	-
3	19.3	0.942	19.3	0.942	19.3	0.942	3	13.0	0.418	15	-	0	-
4	22.1	0.825	22.1	0.825	22.1	0.825	4	22.8	0.767	16	22.8	0.767	22.8
5	-	0	-	0	-	0	5	20.6	0.948	17	20.6	0.948	20.6
6	24.3	0.642	24.3	0.642	24.3	0.642	6	21.1	0.908	18	21.1	0.908	21.1

-	0	-	0	-	0	19	-	0	-	0	11.9	0.325	7
-	0	0	0	12.3	0.358	20	21.4	0.882	21.4	0.882	21.4	0.882	8
-	0	14	0.5	14	0.5	21	17.2	0.767	17.2	0.767	17.2	0.767	9
-	0	-	0	26.6	0.448	22	-	0	-	0	13.8	0.485	10
-	0	-	0	-	0	23	-	0	25.5	0.542	25.5	0.542	11
-	0	-	0	-	0	24	-	0	-	0	12.6	0.385	12

كما تم استعمال اختبار Kolmogorov-Smirnov عند مستوى معنوية (0.05)، لمعرفة فيما اذا كانت بيانات تليف الكبد المضطربة تتبع توزيع ويبل، والنتائج في الجدول (5) ادناه تبين ان قيم P-Value للمتغيرات الثلاثة كانت اكبر من مستوى المعنوية، وهذا يعني قبول فرضية العدم، اي ان بيانات المتغيرات الثلاثة تتبع توزيع ويبل.

جدول (5) اختبار حسن المطابقة لبيانات تليف الكبد المضطربة

المتغير	احصاء الاختبار	P-Value
$\tilde{t}_{0.3}$	0.1447	0.744
$\tilde{t}_{0.5}$	0.1466	0.9049
$\tilde{t}_{0.7}$	0.1754	0.9325

وتم تقدير المعالم ودالة البقاء والمقارنة بينها ولكافة المتغيرات الضبابية والمضطربة، لطرائق التقدير، بالاستناد الى الخطوات والصيغ والمعادلات التي عرضت في الجانب النظري. اذ وضعت النتائج في الجدول (6) ادناه.

جدول (6) تقدرات معلمة القياس والخطا المعياري لبيانات تليف الكبد المضطربة

BAYES	MLE	Parameter	BAYES	MLE	Parameter	$\alpha - cut$
19.887	21.042	ω	2.721	3.321	θ	0.3
2.6915	2.872	SE	0.6143	0.6371	SE	
19.945	21.087	ω	2.755	3.215	θ	0.5
1.3706	3.8525	SE	0.5478	0.7303	SE	
20.002	18.125	ω	2.789	3.29	θ	0.7
1.3475	2.8239	SE	0.5291	1.2028	SE	

من خلال الجدول (6) اعلاه يتضح انها سجلت تقدير معلمة القياس (θ)، اذ بلغت عند مستوى قطع (0.3) فان طريقة (BAYES) اذ سجلت خطأ معياري بلغ (0.6143)، في حين سجلت طريقة (MLE) اعلى قيمة للخطا المعياري وبلغت (0.6371). وعند مستوى قطع (0.5)، اذ سجلت خطأ معياري بلغ (0.5478)، في حين سجلت طريقة (MLE) اعلى قيمة للخطا المعياري وبلغت (0.7303). وعند مستوى قطع (0.7) اذ سجلت خطأ معياري بلغ (0.5291)، في حين سجلت طريقة (MLE) اعلى قيمة للخطا المعياري وبلغت (1.2028). وان تقديرات معلمة القياس (ω)، قد سلكت السلوك ذاته عندما تم تقدير معلمة الشكل (θ) ولكافة مستويات القطع، في حين سجلت طريقة (MLE) اعلى قيم للخطا المعياري..

ومن خلال الجدول (7) ادناه الذي يمثل قيم (LOG-L) المقدره بطريقتي الامكان الاعظم وبيز، ويتضح من خلاله ولكافة مستويات القطع ان طريقة (BAYES) قيمة اعلى من القيم المسجلة بطريقة (MLE).

جدول (7) تقدرات Log-L لبيانات تليف الكبد المضطربة

BAYES	MLE	$\alpha - cut$
-87.53	-111.26	0.3
-87.24	-113.52	0.5
-86.98	-114.93	0.7

9. الاستنتاجات

1. أظهرت النتائج تفوق طريقة بيز مع زيادة مستوى القطع، في حين كان أداء طريقة الامكان الاعظم متذبذباً، وحقق أفضل نتائج عند مستوى القطع 0.3.
2. عند انخفاض قيم معلمي الشكل والقياس لتوزيع ويبل الضبابي، أظهرت طريقة بيز دقة أعلى من طريقة الامكان الاعظم في تقدير معالم التوزيع.
3. كلما قل مستوى القطع والذي يساهم في زيادة حجم العينة، يؤدي الى تحسين أداء طرائق التقدير لمعلمت توزيع ويبل الضبابي.

8. مواد تكميلية

(لا يوجد).

9. مساهمات المؤلفين

أسماء ناجي هاشم: صمم البحث, كتابة وتحريير. فراس منذر جاسم: أجرى التحليلات, تفسير النتائج.

10. التمويل

(لا يوجد).

11. بيان توافر البيانات

(لا يوجد).

12. شكر وتقدير

(لا يوجد).

13. تضارب المصالح

يعلن المؤلفون عدم وجود أي تضارب في المصالح.

References

- [1] Al-Majidi, A. J. S., El-Mongi, H. M. R., & Abdel-Atti, F. A. M. (2023). Estimation of the fuzzy reliability of a mixed distribution (Weibull–Rayleigh). *International Journal of Intelligent Systems and Applications in Engineering*, 11(3), 209-216. <https://doi.org/10.46300/91011.2023.17.29>
- [2] Al-Naqash, A., A., Abdulsahib, S. J. (2019). A Bayes estimator for the Weibull survival function for fuzzy survival time data of kidney failure patients. *Journal of Management and Economics - Mustansiriyah University*, 1(121), 295–306.
- [3] Pak, A., Zolfaghari, S., & Pecht, M. (2013). Parameter estimation for Weibull distribution with fuzzy data using EM algorithm. *Reliability Engineering & System Safety*, 112, 84–90. <https://doi.org/10.1016/j.res.2012.10.010>
- [4] Cox, D. R., & Oakes, D. (1984). *Analysis of survival data*. CRC Press.
- [5] Ross, T. J. (2010). *Fuzzy logic with engineering applications* (3rd ed.). John Wiley & Sons.
- [6] Aje, Z. Y. A. Q. (2015). Estimating the reliability of fuzzy failure times with free distribution and its use in estimating the fuzzy reliability of the Mosul Dam. *Journal of Economic and Administrative Sciences*, 21(81), 348–362.
- [7] Al-Badran, F. M. (2019). Bayes estimation under balanced loss functions. *Journal of Administrative and Economic Sciences*, 44(119), 108–120. <https://doi.org/10.33924/jae.v44i119.539>
- [8] Vishwakarma, G. K., Paul, C., & Singh, N. (2018). Parameters estimation of Weibull distribution based on fuzzy data using neural network. *Biostatistics and Biometrics Open Access Journal*, 6(5), 1-7. <https://doi.org/10.15406/bboaj.2018.06.00223>
- [9] Ali, B. K., & Abdullah, A. Y. (2018). A Bayesian approach for estimating the fuzzy reliability of the Fréchet distribution. *Karbala University Journal for Administrative and Economic Sciences*, 6(26), 55–68.
- [10] Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2013). *Bayesian data analysis* (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC.
- [11] Jaber, A. K. A., & Ibrahim, W. S. (2021). A study on bladder cancer patients using the survival function for the new extended transformed Weibull distribution. *The Iraqi Journal of Administrative Sciences*, 139. <https://doi.org/10.31272/jae.i139.1090>
- [12] Hamza, Z. F., Fadhil, L., & Jassim, F. M. (2023). An extended study to determine the best loss functions for estimating the exponential distribution parameter under Jeffery and Gamma priors. *Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences*, 18(3), 1-13. <https://doi.org/10.26782/jmcms.2023.03.00004>

المصادر

- [1] الماجدي، أ. ج. س.، المنشي، ح. م. ر.، وعبد العاطي، ف. أ. م. (2023). تقدير المعولية الضبابية لتوزيع (وايبل - رايلي). *المختلطات المجلة الدولية للنظم الذكية وتطبيقاتها في الهندسة*، 11(3)، 209-216. <https://doi.org/10.46300/91011.2023.17.29>
- [2] النقاش، أ. أ.، عبد الصاحب، س. ج. (2019). مقدار بايزي لدالة بقاء وايبل لبيانات وقت البقاء الغامضة لمرضى الفشل الكلوي. *مجلة الإدارة والاقتصاد - الجامعة المستنصرية*، 1(121)، 295-306.
- [3] باك، أ.، وزلفغاري، س.، وبيشت، م. (2013). تقدير معلمات لتوزيع وايبل لبيانات غامضة باستعمال خوارزمية EM. *هندسة الموثوقية وسلامة النظام*، 112، 84-90. <https://doi.org/10.1016/j.res.2012.10.010>
- [4] كوكس، د. ر.، و أوكس، د. (1984). *تحليل بيانات البقاء*. CRC Press.
- [5] روس، ت. ج. (2010). *المنطق الغامض مع التطبيقات الهندسية*. جون وايلي سان.
- [6] عجة، ز. ي. أ. ق. (2015). تقدير المعولية لاوقات الفشل الضبابية ذات التوزيع الحر واستعمالها في تقدير الموثوقية الضبابية لسد الموصل. *مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية*، 21(81)، 362-248.

- [7] البدران، ف. م. (2019). التقدير البيزي في ظل دوال الخسارة المتوازنة. مجلة العلوم الإدارية والاقتصادية، 44(119)، 108-120
<https://doi.org/10.33924/jae.v44i119.539>
- [8] فيشواكارما، ج. ك.، بول، س.، وسنغ، ن. (2018). تقدير معلمات توزيع وايبل بناءً على بيانات ضبابية باستعمال الشبكة العصبية. مجلة الإحصاء الحيوي والقياسات الحيوية مفتوحة الوصول، 6(5)، 1-139. <https://doi.org/10.15406/bboaj.2018.06.002237>
- [9] علي، ب. ك.، وعبدالله، أ. ي. (2018). منهج بيزي لتقدير الموثوقية الغامضة لتوزيع فريشيت. مجلة جامعة كربلاء للعلوم الإدارية والاقتصادية، 6(26)، 55-68.
- [10] جيلمان، أ.، كارلين، ج. ب.، ستيرن، ه. س.، دونسون، د. ب.، فيهناري، أ.، وروبين، د. ب. (2013). تحليل البيانات البيزية) ط3. جابمان و هال.
- [11] جابر، أ. ك.، إبراهيم، و. ص. (2021). دراسة عن مرض سرطان المثانة باستعمال دالة البقاء لتوزيع وايبل المحول الجديد الموسع. المجلة العراقية للعلوم الإدارية، 139.139. <https://doi.org/10.31272/jae.i139.1090>
- [12] حمزة، ز. ف.، فاضل، ل.، وجاسم، ف. م. (2023). دراسة موسعة لتحديد أفضل دوال الخسارة لتقدير معلمة التوزيع الأسّي في ظل التوزيعات الأولية لجيفري وغاما. مجلة ميكانيكا المتصل والعلوم الرياضية، 18(3)، 1-13. <https://doi.org/10.26782/jmcms.2023.03.00004>

<https://doi.org/10.31272/jae.i150.1463>

<https://admics.uomustansiriyah.edu.iq/index.php/admecco>

P-ISSN: 1813-6729 E-ISSN: 2707-1359

JAE

Comparison of the Estimators of Weibull Distribution Parameters for Fuzzy Liver Cirrhosis Data Using the Maximum Likelihood and Bayesian Methods

Asmaa Naji Hashem

Dept. of Statistics, College of Administration & Economics, Mustansiriyah University, Baghdad, Iraq

Email: asmaa.hashim@uomustansiriyah.edu.iq, ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0004-2508-5351>

Firas Monther Jassim

Dept. of Statistics, College of Administration & Economics, Mustansiriyah University, Baghdad, Iraq.

Email: firasm@uomustansiriyah.edu.iq, ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4948-8583>

Article Information

Article History:

Received: 30/08/2025

Accepted: 13/11/2025

Available Online: 01/12/2025

Page no: 165 – 175

Keywords:

Bayesian Methods, Fuzzy Liver Cirrhosis D, Maximum Likelihood, Weibull Distribution Parameters

Correspondence:

Researcher name:

Firas Monther Jassim

Email:

firasm@uomustansiriyah.edu.iq

Abstract

This study investigates and compares estimators of the Weibull distribution parameters for fuzzy data derived from survival times of patients with liver cirrhosis using the Maximum likelihood and Bayesian methods. The fuzzy data were converted to conventional data using a trigonometric function. The results demonstrated that the Bayesian method outperformed the Likelihood method, yielding more accurate and stable estimates than the probability method. The results showed that the Bayesian method outperformed the probability method as the cutoff level increased, while the maximum likelihood method fluctuated, achieving its best results at a cutoff level of 0.3.