https://doi.org/10.31272/jae.i151.1511
https://admics.uomustansiriyah.edu.iq
P-ISSN: 1813–6729 E-ISSN: 2707-1359

JAE
OPEN ACCESS

تقدير معلمات أنموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم والبوتستراب للمشاهدات

زهراء محمد محمود النجار
قسم الإحصاء، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة بغداد، بغداد، العراق.
Email: za.najar95@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0009-0008-6483-7236

احمد ذياب احمد
قسم الإحصاء، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة بغداد، بغداد، العراق.
Email: ahmedstatistic@coadec.uobaghdad.edu.iq, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1689-1376

المستخلص

في هذا البحث تم دراسة أنموذج الانحدار المثلثي الكسري متعدد الحدود بوصفه أحد الأنماذج الإحصائية اللاخطية المستعملة في تمثيل العلاقات المعقدة بين المتغيرات التابعة والمستقلة. تم الاعتماد على طريقتين للتقدير هما طريقة الإمكان الأعظم وطريقة البوتستراب للمشاهدات، وتم إجراء تجارب محاكاة باستخدام عينات بأحجام مختلفة للمقارنة بين الطريقتين من حيث كفاءة التقدير. أظهرت النتائج أن طريقة الإمكان الأعظم كانت الأفضل عند انخفاض التباين، في حين تفوقت طريقة البوتستراب عند ارتفاعه. كما طُبّق الأنموذج على بيانات واقعية لمرضى السكري، وأظهرت النتائج أن البيانات تتبع التوزيع الطبيعي وأن أنموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري قادر على تمثيل العلاقة بين المتغيرات بدقة عالية.

معلومات البحث

تواريخ البحث:
التقديم: 2025 / 11 / 06
المراجعة: 2026 / 01 / 23
قبول النشر: 2026 / 01 / 27
نشر الكتروني: 2026 / 03 / 01
تسلسل الصفحات: 28 - 36

الكلمات المفتاحية:
الانحدار المثلثي الكسري، الإمكان الأعظم، البوتستراب، التقدير الإحصائي، مرض السكري.

المراسلة:
أسم الباحث: زهراء محمد محمود النجار
Email: za.najar95@gmail.com

1. المقدمة

يُعد تحليل الانحدار أحد الأساليب الإحصائية الأساسية التي تُستخدم لدراسة طبيعة العلاقة بين متغير تابع ومتغير أو أكثر من المتغيرات. ويعتمد هذا التحليل على بناء نموذج رياضي يهدف إلى تفسير السلوك المشترك بين المتغيرات، بحيث يمكن من خلاله تقدير أو التنبؤ بقيم المتغير التابع استنادًا إلى القيم المعطاة للمتغيرات المستقلة. ويعتبر هذا الأسلوب من الأدوات التحليلية واسعة الاستخدام في مختلف ميادين البحث العلمي، مثل العلوم الاقتصادية والهندسية والطبية والاجتماعية وغيرها، نظرًا لقدرته على تمثيل العلاقات الكمية والتنبؤ بالاتجاهات المستقبلية.ويقسم الانحدار الى الانحدار الخطي والانحدار اللاخطي ويعتبر أنموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري أحد نماذج الانحدار اللاخطي، ويُستخدم لتوضيح العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات التوضيحية عندما تكون العلاقة بينهما غير خطية أو ذات سلوك دوري أو متذبذب.تعود فكرة الأنماذج الكسرية إلى الباحثين [1] اللذين استخدما كثيرات الحدود الكسرية في تمثيل العلاقات المستمرة بين المتغيرات، ثم تطور هذا المفهوم ليشمل الأنماذج المثلثية التي أدخلت دوال الجيب والجيب التمام (Sine, Cosine) إلى الصياغة الرياضية للانحدار، وذلك بهدف زيادة مرونة الأنموذج في تمثيل العلاقات الدورية والمعقدة بين المتغيرات .[2]وقد أثبت هذا النوع من الأنماذج كفاءته في العديد من المجالات التطبيقية، منها الدراسات الطبية والاقتصادية والهندسية، لما يتمتع به من قدرة عالية على تمثيل التغيرات غير الخطية والدورية في البيانات. وتبرز أهمية هذا الأنموذج في الحالات التي تُظهر فيها البيانات نمطًا متذبذبًا أو سلوكًا موسميًا يصعب تمثيله بالأنماذج الخطية أو متعددة الحدود الاعتيادية. ويُعد من الأنماذج المرنة القادرة على إعطاء وصف دقيق للعلاقات المعقدة بين المتغيرات التوضيحية والمتغير التابع. ومن اهم الدراسات في هذا السياق كانت في عام 2014 عندما اقترح الباحثان دراسته الموسومة[3]. "نمذجة متغيرات المخاطر المستمرة: مدخل إلى أنموذج الانحدار متعدد الحدود الكسري"، والتي تناولت تحليل أنموذج الانحدار الخطي لفحص العلاقة بين متغيرين بوجود علاقة خطية بينهما. استخدم الباحثان اختبار مربع كاي (Chi-Square) للمقارنة بين النتائج وتقييم كفاءة الأنماذج في تمثيل البيانات. وقد أظهرت النتائج أن أنموذج الانحدار متعدد الحدود الكسري أكثر تعقيدًا في نمذجة المتغيرات المستمرة مقارنةً بالأنماذج التقليدية، لما يتطلبه من معالجة رياضية تعتمد على القوى الكسرية للمتغيرات المستقلة. كما بيّنت الدراسة أن هذا الأنموذج أكثر مرونة في تمثيل العلاقات غير الخطية، ويوفر ملاءمة أفضل للبيانات مقارنةً بالأنماذج الجزئية، مما يجعله أداة فعّالة لتحليل الظواهر ذات السلوك المعقد أو غير المنتظم. وفي نفس العام قدم[4]. دراسة حلقات متعددات الحدود المثلثية وخصائص تحليلها إلى عوامل حيث درسا الحلقات الجبرية للدوال المثلثية بمعاملات حقيقية ومركبة، وبيّنا كيفية تحليل هذه الدوال إلى عدة عوامل أولية، مع اختيار حلقتين إحداهما بمعاملات حقيقية والأخرى بمعاملات مركبة. وأظهرت نتائج دراستهما أن الحلقة ذات المعاملات الحقيقية

The work of this research is licensed under CC BY

تمتاز بتحليل محدود للعوامل، بينما الحلقة المركبة تُعد مجالًا إقليديًا، كما بينت أن بعض الدوال المثلثية يمكن تحليلها بأكثر من طريقة. وفي عام 2019 درس الباحثون[2]. تقدير معلمات أنموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري حيث درس ثلاث متغيرات مستمرة ودورية التي تمثل (مستوى ضغط الدم, كتلة الجسم, العمر) وتم تقدير معاملات الأنموذج بوسطة طريقة الإمكان الأعظم (MLE) وقد أظهرت النتائج في الأنموذج ان زيادة مؤشر كتلة الجسم يؤدي الى زيادة في مستوى ضغط الدم بينما متغير العمر قد يؤثر او لا يؤثر على مستوى ضغط الدم كذلك أظهرت النتائج ان معاملات التباين في المتغير التابع تم تفسيره جيدا من خلال المتغيرات المستقلة وتبين من قيمة المعدل ان الأنموذج يتمتع بمستوى عال من القدرة التنبؤية

2. مشكلة البحث

تتمثل مشكلة البحث في صعوبة تقدير معلمات أنموذج الانحدار المثلثي الكسري متعدد الحدود بوصفه أحد أشكال الانحدار اللاخطي، إذ تُعد الطرائق التقليدية محدودة الكفاءة في التعامل مع هذا النوع من الأنماذج، مما استدعى استعمال طرائق تقدير بديلة والمقارنة بينها لاختيار الأكثر دقة وملاءمة للتطبيق التجريبي.

3. هدف البحث

يهدف البحث إلى المقارنة بين طريقتي الإمكان الأعظم وبوتستراب المشاهدات في تقدير معلمات أنموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري، وذلك باستعمال معيار متوسط مربع الخطأ لتحديد الطريقة الأكثر كفاءة وملاءمة عند التطبيق على بيانات حقيقية.

4. الجانب النظري

1.4 الانحدار متعدد الحدود

يّعد الانحدار متعدد الحدود أحد اشكال الانحدار اللاخطي يُعد من الأنماذج الإحصائية المستعملة لوصف العلاقات بين المتغيرات التي يمكن تمثيلها بدوال رياضية متعددة الحدود، مثل الدوال التربيعية أو التكعيبية، وذلك عند وجود اتجاهات غير خطية ذات شكل منحني في البيانات. ويُعد هذا الأنموذج امتدادًا طبيعيًا للانحدار الخطي القياسي، إذ يسمح بتمثيل علاقات أكثر تعقيدًا بين المتغيرات التوضيحية والمتغير التابع.يُستخدم هذا الأنموذج على نطاق واسع في التطبيقات الاقتصادية، ولا سيّما في دراسة دوال الكلفة والإنتاج، نظراً لمرونته في تمثيل العلاقات المنحنية بين المتغيرات. وعلى الرغم من الطبيعة اللاخطية للعلاقة بين المتغيرات في هذا الأنموذج، إلا أنّ تقدير معالمه يتم بطريقة خطية من حيث الصياغة الرياضية، مما يسهل التعامل معه إحصائيًا.

ويُوصى باستعمال أنموذج الانحدار متعدد الحدود عندما تُظهر البيانات سلوكًا غير خطي واضحًا بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع، حيث يمكن من خلاله الحصول على تمثيل دقيق للعلاقة التنبؤية وتفسير الاتجاهات العامة في البيانات. ويُعبَّر عنه عادةً بالصيغة الرياضية الآتية [5]

$$Y_t = B_0 + B_1X_{t1} + B_2X_{t2}^2 + \cdots + B_KX_{t1}^k + U_t \qquad (1)$$

اذ ان:k درجة الانموذج، فاذا كانت (k=1) يسمى أنموذج الانحدار الخطي البسيط، وإذا كانت (k=2) فأن الانموذج يكون تربيعي

$$Y_t = B_0 + B_1X_{t1} + B_2{X_{t1}}^2 + U_t \qquad (2)$$

إذ ان: B_1: معلمة التأثير الخطي.B_2 معلمة التأثير التربيعي.

تسمى الصيغة (2) بالمعادلة التربيعية أو (أنموذج الانحدار متعدد الحدود من الدرجة الثانية) للمتغير المستقل (X).

وإذا كانت قيمة (k=3) فان الأنموذج يسمى متعدد الحدود من الدرجة الثالثة وهكذا وأن مثل هذه الصيغ يوجد فيها متغير مستقل واحد ولكن بقوى مختلفة الأمر الذي أدى إلى جعله أنموذجاً متعدداً.

2.4 الانحدار متعدد الحدود الكسري

في إطار تطوير الأنماذج الإحصائية غير الخطية، يعد أنموذج الانحدار متعدد الحدود الكسري تطويرًا منهجيًا لنماذج متعددات الحدود التقليدية، إذ توفر إطارًا أكثر مرونة لتحديد الشكل الوظيفي المناسب للعلاقات بين المتغيرات المستمرة. وتمتاز هذه الأنماذج بقدرتها العالية على تمثيل العلاقات غير الخطية بين المتغيرات، مما يجعلها أكثر ملاءمة في الحالات التي يصعب فيها توصيف العلاقة باستعمال الانماذج الخطية الاعتيادية. وقد حظيت هذه الأنماذج باهتمام واسع في الأبحاث التطبيقية، إذ استُعملت في مجالات متعددة من بينها تحليل البقاء على قيد الحياة (Survival Analysis) ودراسة حالات الانتكاس (Relapse Studies)، لما تتميز به من دقة في تمثيل سلوك البيانات وإمكانية تفسير النتائج إحصائيًا بطريقة مبسطة وقابلة للتطبيق العملي.

وتكون صيغة أنموذج الانحدار متعدد الحدود الكسري من الدرجة الاولى كالاتي: [8,6,7]

$$Y = B_0 + B_1X^P \qquad (3)$$

يتم اختيار القوة p كالاتي: $log\ (t\ ) = -2, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 3, \dots\dots, t^0$

انموذج أنحدار متعدد الحدود الكسري من الدرجة الثانية:

$$Y = B_0 + B_1X^{P_1} + B_2X^{P_2} \qquad (4)$$

3.4 الانحدار متعدد الحدود المثلثي

يعرف الانحدار المتعدد الحدود المثلثي (Trigonometric Polynomial). [9] على أنه تركيبة خطية محدودة من الدوال المثلثية sin(nx) وcos(nx) مع وجود افتراض القيم لواحد أو أكثر من الاعداد الطبيعية وبالتالي فان معادلة أنموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي التي تحتوي على الدالة t تكون بالصيغة التالية:[4]

$$y(t) = B_0 + \alpha_i coswx_t + \beta_j sinwx_t + U_t \quad (5)$$

اذ ان: B_0: يمثل الحد الثابت، $\alpha_{i,}\beta_j$ المعلمات مرتبطة بدوال الجيب والجيب التمام، $cos\ cos\ wx_t, sinwx_t$: دوال مثلثية دورية مع فترة زمنية تساوي $\frac{2\pi}{w}$ ، U_t : يمثل الاخطأ العشوائي.

4.4. الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري

يُعدّ أنموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري أحد أشكال الانحدار اللاخطي، إذ يجمع بين مرونة متعددات الحدود الكسرية وقدرة الدوال المثلثية مثل الجيب والجيب تمام (Sin, Cos) على تمثيل السلوك الدوري والمتذبذب للبيانات. يتيح هذا الدمج توصيف العلاقات المعقدة وغير الخطية بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة بدقة أعلى، من خلال إدخال الدوال المثلثية على قوى كسرية ذات رتب طبيعية. وتُعد هذه الطريقة ملائمة بشكل خاص لتحليل البيانات التي تُظهر أنماطًا مستمرة ودورية في آنٍ واحد، ولاسيما تلك التي تتغير مع مرور الزمن، مما يجعلها أداة فعّالة في نمذجة الظواهر ذات الطبيعة المتذبذبة. ويُعبر عنه رياضيًا بالصيغة الآتية:.[2]

$$y_t = B_0 + B_1 coswx_t^{p_1} + B_1^* sinwx_t^{p_1} + \cdots + B_n coswx_t^{p_n} + B_n^* sinwx_t^{p_n} + U_t \quad (6)$$

اذ ان: y المتغير التابع، x: المتغير المستقل، $B_0, B_1, B_1^*, \ldots B_n, B_n^*$: معاملات التوضيحية للمتغيرات، $cos\ cos\ wx_t, sinwx_t$: دوال مثلثية دورية مع فترة زمنية تساوي $\frac{2\pi}{w}$ ، U_t : يمثل الاخطأ العشوائي.

والذي يتوزع توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2

$$U \sim N(\mu, \sigma^2)$$

وبصيغة المصفوفات تكون المعادلة (7) كالاتي:

$$Y = \mathrm{XB} + \mathrm{U} \quad (7)$$

أذ أن:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \cos(wx_1^{p_1}) \sin(wx_1^{p_1}) .. \cos(wx_1^{p_n}) \sin(wx_1^{p_n})\ 1 \cos(wx_2^{p_1}) \sin(wx_2^{p_1}) .. \cos(wx_2^{p_n}) \sin(wx_2^{p_n}) \ldots \\ 1\ cos(wx_t^{p_1})\ cos(wx_t^{p_1}) ..\ cos(wx_t^{p_n})\ sin(wx_t^{p_n}) \end{bmatrix}$$

$$Y = [Y_1\ Y_2 \ldots Y_t\ ]\ \ , B = [B_0\ B_1\ B_1^* .. B_n\ B_n^*\ ]\ ,\ \ \mathrm{U}=[u_1\ u_2 \ldots u_n\ ]$$

5. طرائق التقدير

لتقدير معلمات أنموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري سيتم استعمال الطرائق الاتية، طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) وطريقة البوتستراب للمشاهدات (Pairs Bootstrap method).

1.5. طريقة الإمكان الأعظم

ان المبدأ الذي يستند علية هذه الطريقة هو إيجاد تقديرات للمعالم (B_i) و(σ^2) التي تجعل دالة الإمكان الاعظم في نهايتها العظمى، وتعد طريقة الإمكان الأعظم من اهم طرائق التقدير في الإحصاء. وتكون صيغته كالاتي[10]

$$L(B_i\ ; \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ e\frac{-\sum(y-\hat{y})^2}{2\sigma^2} \quad (8)$$

$$\hat{Y} = B_0 + B_1 coswx_t^{p_1} + B_1^* sinwx_t^{p_1} + \cdots + B_n coswx_t^{p_n} + B_n^* sinwx_t^{p^n} \quad (9)$$

وبأخذ اللوغارتم الطبيعي للطرفين والمساوة للصفر تكون صيغة الإمكان الأعظم كالاتي:

$$nl = \frac{-n}{2} log2\pi - \frac{n}{2} log\sigma^2\ \ - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y - B_0 + B_1 . coswx_t^{p_1} + B_1^* sinwx_t^{p_1} + \cdots + B_n coswx_t^{p_n} + B_n^* sinwx_t^{p_n})^2 \quad (10)$$

وباشتقاق الصيغة (10) بالنسبة الى (σ^2) نحصل على الاتي:

$$n\hat{\sigma}^2 + \sum_{i=1}^{n} (y - B_0 + B_1 coswx_t^{p_1} +\ B_1^* sinwx_t^{p_1} \ldots \ldots + B_n coswx_t^{p_n} + B_1^*\ sinwx_t^{p_n})^2 = 0 \quad (11)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y - \hat{y})^2 \quad (12)$$

اما بالنسبة لصيغ تقدير المعلمات $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ ناخذ المجموع لطرفي الصيغة (10) ونضرب طرفي الصيغة (10) بـ$(coswx_t^{p^1})$ ينتج

$$\sum_{i=1}^{n} y coswx_t^{p1} = B_0 \sum_{i=1}^{n} coswx_t^{p1} + B_1 \sum_{i=1}^{n} \left(coswx_t^{p1}\right)^2 + B_1^* \sum_{i=1}^{n} \left(coswx_t^{p1}\right)\left(sinwx_t^{p_1}\right) + \cdots + B_n \sum_{i=1}^{n} \left(coswx_t^{p_n}\right)\left(coswx_t^{p_1}\right) + B_n^* \sum_{i=1}^{n} \left(sinwx_t^{p_n}\right)\left(coswx_t^{p_1}\right) \quad (13)$$

نضرب طرفي الصيغة (10) بـــ $(sinwx_t^{p_1})$ ينتج

$$\sum_{i=0}^{n} y sinwx_t^{p_1} = B_0 \sum_{i=1}^{n} sinwx_t^{p_1} + B_1 \sum_{i=1}^{n} \left(coswx_t^{p1}\right)\left(sinwx_t^{p_1}\right) + B_1^* \sum_{i=1}^{n} \left(sinwx_t^{p_1}\right)^2 + \cdots + B_n \sum_{i=1}^{n} \left(coswx_t^{p_n}\right)\left(sinwx_t^{p_1}\right) + B_n^* \sum_{i=1}^{n} \left(sinwx_t^{p_n}\right)\left(sinwx_t^{p_1}\right) \quad (14)$$

نضرب طرفي الصيغة (10) بـ $(coswx_t^{p_n})$ ينتج

$$\sum_{i=1}^{n} y\, coswx_t^{p_n} = B_0 \sum_{i=1}^{n} coswx_t^{p_n} + B_1 \sum_{i=1}^{n} \left(coswx_t^{p}\right)\left(coswx_t^{p_n}\right) + B_1^* \sum_{i=1}^{n} \left(sinwx_t^{p_1}\right)\left(coswx_t^{p_n}\right) + \cdots + B_n \sum_{i=1}^{n} \left(coswx_t^{p_n}\right)^2 + B_n^* \sum_{i=1}^{n} \left(sinwx_t^{p_n}\right)\left(coswx_t^{p_n}\right) \quad (15)$$

نضرب طرفي الصيغة (10) بـ $(sinwx_t^{p_n})$ ينتج

$$\sum_{i=1}^{n} y\, sinwx_t^{p_n} = B_0 \sum_{i=1}^{n} sinwx_t^{p_n} + B_1 \sum_{i=1}^{n} \left(coswx_t^{p}\right)\left(sinwx_t^{p_n}\right) + B_1^* \sum_{i=1}^{n} \left(sinwx_t^{p_1}\right)\left(sinwx_t^{p_n}\right) + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \left(coswx_t^{p_n}\right)^2 + B_n^* \sum_{i=1}^{n} \left(sinwx_t^{p_n}\right)\left(coswx_t^{p_n}\right) + B_n \sum_{i=1}^{n} \left(coswx_t^{p_n}\right)\left(sinwx_t^{p_n}\right) + B_n^* \sum_{i=1}^{n} \left(sinwx_t^{p_n}\right)^2 \quad (16)$$

وعلية فأن الصيغة التقديرية لمعلمات أنموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري يكون كالاتي

$$B = (X'X)^{-1} X'Y \quad (17)$$

2.5. طريقة البوتستراب المشاهدات

في عام (1979) اقترح Efron هذه الطريقة التي تعد احد الأساليب الإحصائية حيث استخدم هذا الأسلوب في تقدير خصائص التوزيع مثل الانحراف المعياري وفترات الثقة وقيمة الاحتمالية ويتم استعمال طريقة البوتستراب للمشاهدات في تطبيقات نماذج الانحدار التي يفترض ان العينة الاصلية تتكون من n زوج من المشاهدات على شكل [12,11]

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots \dots \dots (X_n, Y_n)$$

يسحب عدد γ من العينات كأزواج من نفس حجم العينة الاصلية وبإرجاع نحصل على عينات البوتستراب

$$X^{*\gamma} = (X_1^*, Y_1^*), (X_2^*, Y_2^*), \dots\dots, (X_n^*, Y_n^*)$$

ويتم حساب الخوارزمية لهذه الطريقة وفق الصيغة الاتية [13]

1- سحب عينه عشوائية بحجم (n) من المجتمع
2- يتم سحب (L) عينه من حجم العينة (n) مع الارجاع
3- تقدير معلمات أنموذج الانحدار المثلثي الكسري متعدد الحدود لكل (γ) من العينات المسحوبة
4- يتم إيجاد معدل العينات والتي تمثل تقدير المعلمات

$$\sigma_{PBoot}^2 = \frac{\left(\hat{U}'\hat{U}\right)}{n-\gamma} \quad (18)$$

6. المحاكاة

تم اجراء تجربة المحاكاة باستعمال ثلاثة حجوم للعينات(100,60,30) وبتكرار التجربة 1000 مرة وتم تحديد القيم الافتراضية للمعلمات

$$(B_0 = 0.5, B_1 = 2, B_1^* = 0.2, B_2 = 1, B_2^* = 0.5)$$

واختيار القيم الافتراضية لمعلمتي التوزيع $(\mu = 0)$ و $\sigma^2 = (1,7)$
سيكون الاعتماد انموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري بمتغيرين توضيحين وكالآتي:

$$y_t = B_0 + B_1 coswx_t^{p1} + B_1^* sinwx_t^{p1} + B_2 coswx_t^{p2} + B_2^* sinwx_t^{p2} \qquad (19)$$

وتكون المقارنة بين الطرائق باستعمال معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمعلمات وان نتائج تجارب المحاكاة تكون وفق الصيغ الاتية:

الجدول (1) يمثل (MSE) للمعلمات عندما $\mu = 0$ $\sigma^2 = 1$,

N	Parameter	ML	PBOOT	BEST
30	σ^2	0.002940516	0.260652503	ML
	B_0	0.001436886	0.007063090	ML
	B_1	0.002757518	0.112910394	ML
	B_1^*	0.002822746	0.001149542	ML
	B_2	0.003035751	0.028246952	ML
	B_2^*	0.0023620611	0.007079136	ML
60	σ^2	0.000613632	0.123614606	ML
	B_0	0.000327684	0.003518183	ML
	B_1	0.000654305	0.056430306	ML
	B_1^*	0.000591774	0.000574040	PBOOT
	B_2	0.000649255	0.01411905	ML
	B_2^*	0.000569952	0.003537226	ML
100	σ^2	0.000214519	0.073316042	ML
	B_0	0.000114153	0.002114947	ML
	B_1	0.000215193	0.033858491	ML
	B_1^*	0.000222450	0.000340869	ML
	B_2	0.000214312	0.008460452	ML
	B_2^*	0.000198662	0.002121790	ML

نلاحظ من الجدول (1) ان طريقة ML تفوقت في تقدير معلمات أنموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري مما يشير الى دقتها العالية في تقدير معلمات الانموذج.

الجدول (2) يمثل (MSE) للمعلمات عندما $\mu = 0$ $\sigma^2 = 7$,

n	Parameter	ML	PBOOT	BEST
30	σ^2	42.85501787	73.39638566	ML
	B_0	0.070407434	0.007555881	PBOOT
	B_1	0.135118369	0.114105785	PBOOT
	B_1^*	0.138314531	0.002125810	PBOOT
	B_2	0.148751812	0.029349579	PBOOT
	B_2^*	0.115740977	0.007961276	PBOOT
60	σ^2	25.39157037	35.03646464	ML
	B_0	0.016056512	0.003559141	PBOOT
	B_1	0.032060949	0.056634523	ML
	B_1^*	0.028996903	0.000801021	PBOOT
	B_2	0.031813478	0.014382983	PBOOT
	B_2^*	0.027927674	0.003767820	PBOOT
100	σ^2	16.38611078	20.80676721	ML
	B_0	0.005593506	0.002140065	PBOOT
	B_1	0.010544442	0.033932356	ML
	B_1^*	0.010900071	0.000416373	PBOOT
	B_2	0.010501309	0.008499341	PBOOT
	B_2^*	0.009734426	0.002213007	PBOOT

نلاحظ في الجدول (2) انه عند ارتفاع قيمة التباين تفوقت طريقة البوتستراب بينما كانت طريقة ML الأفضل في تقدير معلمة σ^2

7. بيانات التجربة:

تشير الإحصائيات أن مرض السكري يصيب قرابة 422 مليون شخص حول العالم، الكثير منهم يجهلون إصابتهم به. ويعرف هذا المرض بإرتفاع مستوى الكلوكوز في الدم نتيجة خلل في إفراز الكمية الكافية من الأنسولين مما يؤدي إلى تراكم السكر في الدم. وفي بعض الحالات يكون السبب زيادة تناول الكربوهيدرات أو حدوث مشكلة في التمثيل الغذائي للبروتينات والدهون، والأمر الذي

يرتبط في بعض الأحيان بالسمنة. وهناك نوعان من مرض السكري النوع الأول يسمى بداء الفتيان حيث يصيب الأطفال ويعتمد على الانسولين، أما النوع الثاني السكري الغير معتمد على الانسولين وغالبا مايصيب البالغين.[5]

تم جمع البيانات الخاصة بمرضى السكري من دائرة صحة الكرخ للرعاية الصحية الأولية للسنه (2024-2025) وقد تمت الاستعانة بسجلات المرضى والمراجعين لغرض الحصول على المتغيرا تy_i التي تمثل مستوى السكر الدم X_1 الذي يمثل متغير العمر X_2 الذي يمثل كتلة الجسم شملت عينة حجمها (34) من الافراد الذين تمت متابعتهم خلال الفترة المحددة تم اختبار البيانات باستعمال برنامج (SPSS) بتطبيق اختبار شابيرو (Shapiro-wilk) .[14] الذي يُعد من أكثر الاختبارات الإحصائية شيوعًا وكفاءة للتحقق من مدى توافق البيانات مع التوزيع الطبيعي، ولا سيما في العينات الصغيرة والمتوسطة. يعتمد هذا الاختبار على قياس درجة الارتباط بين القيم المشاهدة للعينة والقيم المتوقعة لها في حالة التوزيع الطبيعي. يتميز الاختبار بقوة إحصائية عالية في الكشف عن الانحرافات عن الطبيعية مقارنةً بالاختبارات الأخرى. حيث تتراوح قيمة إحصاء الاختبار بين الصفر والواحد، وتشير القيم القريبة من الواحد إلى توافق البيانات مع التوزيع الطبيعي، في حين تدل القيم الصغيرة على وجود انحراف عن هذا التوزيع، وبناءً عليه يتم اتخاذ قرار قبول أو رفض فرضية العدم. للتحقق من طبيعة توزيع البيانات واظهرت النتائج ان قيمة الدلالة الإحصائية (Sig) لأنموذج الانحدار المتعدد الحدود المثلثي الكسري في اختبار Shapiro-wilk بلغت (0.146) وهي قيم أكبر من مستوى المعنوية (0.05) وهذا يدل على عدم وجود فروق معنوية بين التوزيع الفعلي والتوزيع الطبيعي وبالتالي لا يتم رفض فرضيه العدم أي ان البيانات تتبع التوزيع الطبيعي وبما ان اختبار Shapiro-wilk يعد أكثر قوة وملائمة للعينات الصغيرة والمتوسطة فقد تم الاعتماد عليه لتأكيد ان بيانات المتغير تتوزع توزيعاً طبيعياً. و تم الاعتماد على نتائج طريقة ML لتقدير معلمات الانموذج وعليه يكون أنموذج الانحدار متعدد الحدود المثلثي الكسري

$$\begin{aligned} Y = 0.010631398 - 0.000895065 coswx_t^{p1} - 0.000063008 sinwx_t^{p1} \\ - 0.000299308 coswx_t^{p2} - 0.000035654\, sinwx_t^{p2} \end{aligned} \quad (20)$$

أظهرت نتائج طريقة الإمكان الأعظم أن معلمات متغيري كتلة الجسم والعمر كانت سالبة، مما يشير إلى علاقة عكسية مع مرض السكري وفق تقديرات الأنموذج، وقد يُعزى ذلك إلى خصائص العينة أو إلى طبيعة الأنموذج الإحصائي المستعمل الذي يسمح بتذبذب المعلمات.

8. الاستنتاجات

1. أثبت أنموذج الانحدار المثلثي الكسري متعدد الحدود كفاءته في تمثيل العلاقات غير الخطية بدقة عالية.
2. تفوقت طريقة الإمكان الأعظم (ML) في تقدير المعلمات عند التباين المنخفض، بينما كانت طريقة البوتستراب أدق عند التباين العالي.
3. أظهرت نتائج الاختبارات أن بيانات مرضى السكري تتبع التوزيع الطبيعي مما يؤكد سلامة التحليل الإحصائي المستعمل.
4. يُعد هذا الأنموذج خطوة متقدمة نحو تطوير أدوات تحليلية أكثر مرونة في دراسة العلاقات بين المتغيرات، لاسيّما في البيانات ذات السلوك المتذبذب أو الموسمي.

9. التوصيات

1. يُوصى باعتماد أنموذج الانحدار المثلثي الكسري متعدد الحدود في تحليل البيانات التي تظهر سلوكًا غير خطي أو دوريًا، لاسيما في المجالات الطبية والاقتصادية والهندسية.
2. اعتماد طريقة ML عند البيانات المستقرة والبوتستراب عند التباين العالي.
3. توسيع الدراسة مستقبلاً لتشمل عينات أكبر ومتغيرات إضافية لتحسين دقة النتائج.

10. مواد تكميلية

(لا توجد).

11. مساهمات المؤلفين

زهراء محمد محمود النجار: صمم البحث، كتابة وتحرير وأجرى التحليلات واحمد ذياب احمد: تفسير النتائج.

12. التمويل

(لا توجد).

11. بيان توافر البيانات

1- مجموعة البيانات الصحية الخاصة بمرضى السكري تم الحصول عليها من وزارة الصحة العراقية / دائرة صحة الكرخ للرعاية الصحية الأولية)بيانات خاصة.
2- البيانات تم جمعها من السجلات الصحية الشهرية والدوريات الإحصائية التابعة للدائرة، والمتعلقة بالفترة من عام 2024 إلى عام 2025.
3- جميع البيانات المستعملة في هذا البحث هي بيانات رسمية غير منشورة، تم الحصول عليها لأغراض البحث العلمي فقط، ولا يمكن مشاركتها علنًا التزامًا بسياسات السرية وحماية خصوصية المرضى المعتمدة في وزارة الصحة العراقية.

12. شكر وتقدير

يتقدم المؤلفون بجزيل الشكر والتقدير إلى وزارة الصحة العراقية / دائرة صحة الكرخ للرعاية الصحية الأولية، وذلك لتعاونهم المثمر وتزويدنا بالبيانات الصحية المتعلقة بمرضى السكري، والتي كان لها الأثر الكبير في إنجاز الجانب التطبيقي من هذا البحث. وكما يعرب المؤلفون عن امتنانهم للكوادر الصحية والإدارية في الدائرة لما قدموه من دعم وتسهيلات أثناء جمع البيانات وتحليلها.

13. تضارب المصالح

عدم وجود أي تضارب في المصالح.

References

[1] Royston, P., & Altman, D. G. (1994). Regression using fractional polynomials of continuous covariates: Parsimonious parametric modelling. Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics), 43(3), 429–467. DOI: https://doi.org/10.2307/2986270

[2] Ishola, T. A., Olatayo, O. T., & Adesanya, K. K. (2019). Parameter estimation of fractional trigonometric polynomial regression model. International Journal of Computers, 5, 19-25. Link: https://www.iaras.org/iaras/journals/ijc .

[3] Duong, H., & Volding, D. (2014). Modelling continuous risk variables: Introduction to fractional polynomial regression. Vietnam Journal of Science (VJS), 1(2). Link: https://vietnamresearch.com/vjs/

[4] Ullah, E., & Shah, T. (2014). Trigonometric polynomial rings and their factorization properties. Matematički Vesnik, 66(3), 301–314. DOI: https://doi.org/10.2298/MEV1403301U

[5] Ahmed, A. D., & Kazem, G. A. S. (2017). Estimation of parameters of the second-degree multivariate polynomial regression model with a practical application. Al-Qadisiyah Journal of Administrative and Economic Sciences, 19(3), 376–398. Link (IASJ): https://www.iasj.net/iasj/article/133719

[6] Baneshi, M. R., Nakhaee, F., & Law, M. (2013). On the use of fractional polynomial models to assess preventive aspect of variables: An example in prevention of mortality following HIV infection. International Journal of Preventive Medicine, 4(4), 414–419. DOI: https://doi.org/10.4103/2008-7802.111820

[7] Royston, P., Ambler, G., & Sauerbrei, W. (1999). The use of fractional polynomials to model continuous risk variables in epidemiology. International Journal of Epidemiology, 28(5), 964–974. DOI: https://doi.org/10.1093/ije/28.5.964

[8] Morris, T. P., White, I. R., Carpenter, J. R., Stanworth, S. J., & Royston, P. (2015). Combining fractional polynomial model building with multiple imputation. Statistics in Medicine, 34(21), 3298–3317. DOI: https://doi.org/10.1002/sim.6549

[9] Eubank, R.L, & Speckman, P. (1987). Data Smoothing by polynomial-trigonometric regression. Technical Report No. SWI/DS/TR/212, Southern Methodist University.

[10] Ali, O. A., & Kazem, K. J. (2019). Using the maximum likelihood method with a proposed weight to estimate the effect of some pollutants in the Tigris River – Kut city. Journal of Administration and Economics, 42(120). Link (IASJ): https://www.iasj.net/iasj/article/171549

[11] Barrios, E. B. (2011). Bootstrap methods. The Philippine Statistician, 60(1), 129–132. Link: https://psa.gov.ph/sites/default/files/ThePhilippineStatistician_2011_60_1_11.pdf

[12] Ahmed, S. A. (2018). Estimation of simple linear regression model parameters using the bootstrap method under heteroscedasticity. Scientific Journal of Faculty of Commerce, Alexandria University, 55(2), 184–511. Link: https://acj.journals.ekb.eg/

[13] Ahmed, A. D., & Rahman, M. A. R. (2019). Comparison of modified maximum likelihood methods for estimating autoregressive model parameters. Journal of Administration and Economics, University of Baghdad, 42(120), 305–318. Link (IASJ): https://www.iasj.net/iasj/article/171561

[14] Das, K. R., & Imon, A. H. M. R. (2016). A brief review of tests for normality. American Journal of Theoretical and Applied Statistics, 5(1), 5–12. DOI: https://doi.org/10.11648/j.ajtas.20160501.12

المصادر

[1] روستون، ب.، وألتمان، د. ج.(1994) .الانحدار باستخدام كثيرات الحدود الكسرية للمتغيرات المستمرة: النمذجة البارامترية الاقتصادية (الموجزة). مجلة الجمعية الملكية للإحصاء: السلسلة C الإحصاء التطبيقي(، المجلد 43)3(، الصفحات .429–467 https://doi.org/10.2307/2986270

[2] إشولا، ت. أ.، أولاتايو، أ. ت.، و أديسانيا، ك. ك. (2019). تقدير معلمات نموذج الانحدار متعدد الحدود الجيبي الكسري .المجلة الدولية للحواسيب، 5، 19-25 https://www.iaras.org/iaras/journals/ijc . .

[3] دونغ، هـ.، و فولدينغ، د. (2014). نمذجة متغيرات المخاطر المستمرة: مقدمة في الانحدار متعدد الحدود الكسري .مجلة فيتنام للعلوم(VJS) ، 1.(2) Link: https://vietnamresearch.com/vjs/

[4] الله، إ.، و شاه، ت. (2014). حلقات متعددات الحدود الجيبية وخصائص تحليلها .ماتيماتيكي فيسنيك، 66(3)، 301-314 . https://doi.org/10.2298/MEV1403301U

[5] احمد، أحمد ذياب، و كاظم، غيث عبد الشهيد. (2017). تقدير معاملات أنموذج الانحدار متعدد العوامل – متعدد الحدود من الدرجة الثانية مع تطبيق عملي. مجلة القادسية للعلوم الإدارية والاقتصادية،(3) 19، https://www.iasj.net/iasj/article/133719 376-398

[6] بانشي، م. ر.، نخعي، ف.، و لو، م. (2013). حول استخدام نماذج متعددة الحدود الكسرية لتقييم الجوانب الوقائية للمتغيرات: مثال في الوقاية من الوفيات الناتجة عن عدوى فيروس نقص المناعة البشرية .(HIV) المجلة الدولية للطب الوقائي، 4(4)، 414-419 https://doi.org/10.4103/2008-7802.111820

[7] وستون، ب.، أمبلر، ج.، وساوربراي، و.(1999) .استخدام كثيرات الحدود الكسرية في نمذجة متغيرات المخاطر المستمرة في علم الأوبئة. المجلة الدولية لعلم الأوبئة(International Journal of Epidemiology) ، المجلد 28(5)، الصفحات .964–974 https://doi.org/10.1093/ije/28.5.964

[8] موريس، ت. ب.، وايت، آي. ر.، وكاربنتر، ج. ر.، وستانوورث، س. ج.، وروستون، ب.(2015) .دمج بناء نموذج كثيرات الحدود الكسرية مع أسلوب التعويض المتعدد.(Multiple Imputation) مجلة الإحصاء في الطب(Statistics in Medicine) ، المجلد 34(21)، الصفحات 3298–3317 . https://doi.org/10.1002/sim.6549

[9] يوبانك، ر. ل.، و سبيكمان، ب. (1987). تنعيم البيانات باستخدام الانحدار متعدد الحدود-الجيبي(تقرير فني رقمSWI/DS/TR/212 ، 29 صفحة) قسم العلوم الإحصائية، جامعة ساوثرن ميثوديست .

[10] علي، عمر. عبد المحسن. ، وكاظم، خالد. جمال. (2019). استعمال طريقة الإمكان الأعظم مع وزن مقترح لتقدير تأثير بعض الملوثات في نهر دجلة - مدينة الكوت .مجلة الادارة والاقتصاد(120)42 , https://www.iasj.net/iasj/article/171549

[11] باريوس، إ. ب.(2011) .طرائق البوتستراب.(Bootstrap Methods) مجلة الإحصائي الفلبيني(The Philippine Statistician) ، المجلد 60(1)، الصفحات .129–132 https://psa.gov.ph/sites/default/files/ThePhilippineStatistician_2011_60_1_11.pdf

[12] احمد، شمس الدين. أحمد. (2018). تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط باستخدام طريقة البوتستراب في حالة عدم ثبات التباين بنمطي الدالة التربيعية والجذرية. مجلة كلية التجارة للبحوث العلمية، جامعة الإسكندرية، المجلد 55(2)، الصفحات184–511. https://acj.journals.ekb.eg/

[13] أحمد، أحمد ذياب. ،و رحمن .محمد. عبد الرضا. (2019). مقارنة طرائق الإمكان الأعظم المعدلة لتقدير معلمات أنموذج الانحدار الذاتي. مجلة الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، السنة . 42(120)، الصفحات 305–318.

[14] داس ،ك. ر، وإيمون، أ. هـ. م. ر.(2016) . مراجعة موجزة للاختبارات الإحصائية الخاصة بالتحقق من التوزيع الطبيعي المجلة الأمريكية للإحصاء النظري والتطبيقي(American Journal of Theoretical and Applied Statistics) ، المجلد 5(1)، الصفحات https://doi.org/10.11648/j.ajtas.20160501.125–12.

https://doi.org/10.31272/jae.i151.1511
https://admics.uomustansiriyah.edu.iq
P-ISSN: 1813–6729 E-ISSN: 2707-1359

Parameters Estimation of the Fractional Trigonometric Polynomial Regression Model Using Maximum Likelihood and Bootstrap Methods

Zahraa Mohammed Mahmood AL-Najar
Dept. of Statistics, College of Administration & Economics, University of Baghdad, Baghdad, Iraq.
Email: za.najar95@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0009-0008-6483-7236
Ahmed Dheyab Ahmed
Dept. of Statistics, College of Administration & Economics, University of Baghdad, Baghdad, Iraq.
Email: ahmedstatistic@coadec.uobaghdad.edu.iq, ORCID : https://orcid.org/0000-0002-1689-1376

Article Information

Article History:
Received: 06 / 11 / 2025
Revised: 23 / 01 / 2026
Accepted: 27 / 01 / 2026
Available Online: 01 / 03 / 2026
Pages no: 28 – 36

Keywords:
Fractional Trigonometric Regression, Maximum Likelihood, Bootstrap, Statistical Estimation, Diabetes.

Correspondence:
Researcher name:
Zahraa Mohammed Mahmood AL-Najar
Email: za.najar95@gmail.com:

Abstract

This study aims to examine the Fractional Trigonometric Polynomial Regression Model as a nonlinear statistical model for representing complex relationships between dependent and independent variables. Two estimation methods were used: the Maximum Likelihood (ML) and Bootstrap methods. Simulation experiments with different sample sizes were conducted to compare their performance in parameter estimation. The results showed that the ML method performed better when the variance was low, whereas the Bootstrap method was more accurate when the variance was high. The model was also applied to real data of diabetic patients, and the findings confirmed that the data follow a normal distribution and that the proposed model provides a precise representation of the relationships among variables

The work of this research is licensed under CC BY