

عائلة توزيعات الإسقاط المجسم الاسية الشبه دائرية المقترحة: الخصائص والتطبيقات

Exponentiated Stereographic Semicircular Family Distribution

ا.د. عواد كاظم شعلان الخالدي
 كرم ناصر حسين العبادي
 نهلة هادي عبد الصاحب
 Prof. Awad Kadim Shaalan AL-Khalidi¹
 Karam Nasser Hussein Al-Abadi²
 Nahla Hadi Abdul Sahib³

كلية الادارة والاقتصاد/ جامعة وارث الانبياء
 مديرية احصاء كربلاء المقدسة
 كلية الهندسة / جامعة بابل المسيب
 Alkhalidyawad16@gmail.com
 karamnassir6@gmail.com
 nahla.hadiabdul@uobabylon.edu.iq

المستخلص:

في هذا البحث تم تقديم عائلة الإسقاط المجسم الاسية الشبه دائرية E SSD كقاعدة لتحويل التوزيعات الاحتمالية الخطية الى توزيعات ذات مرونة ودقة عالية في تمثيل البيانات الإحصائية الدائرية، باستعمال قاعدة العائلة الاسية وقاعدة الإسقاط المجسم لتوليد التوزيعات شبه الدائرية، لاشتقاق دالة كثافة احتمالية وتطبيقها على توزيع فريجت الخطي بغية الحصول على توزيع احتمالي دائري جديد يمتاز بالدقة والشمولية والمرونة في تمثيل البيانات الدائرية، وتم اشتقاق بعض الخصائص الرياضية للتوزيع المقترح ، واشتقاق مقدرات المعلمات المجهولة للتوزيع المقترح باستعمال طريقة لإمكان الاعظم (MLE) ، طبقت الدراسة على عينة حجمها 100 مشاهدة تمثل زوايا انحناء القرنية الخلفي للعين ، تم التوصل الى ان التوزيع المقترح اكثر كفاءة في تمثيل البيانات الدائرية بالمقارنة مع نموذج باريتو واييل نصف الدائري المجسم وتوزيع توزيع غاما نصف الدائري المجسم بالاعتماد على معيار أكايكي AIC ومن اختبار بيز أكايكي BIC، واختبار أكايكي المتسق CAIC بعد اجتياز ملاءمة البيانات الحقيقية التوزيع المقترح وفقا لاختبار كاي سكوير.

الكلمات المفتاحية: طريقة الإمكان الأعظم ، عائلة توزيعات الإسقاط المجسم الاسية الشبه دائرية.

Abstract:

In this paper, the exponential semi-circular solid-state projection family (ESD) is presented as a basis for transforming linear probability distributions into highly flexible and accurate distributions for representing circular statistical data. The exponential family rule and the solid-state projection rule are used to generate semi-circular distributions. A probability density function is derived and applied to the linear Fréchet distribution to obtain a new circular probability distribution characterized by accuracy, comprehensiveness, and flexibility in representing circular data. Some mathematical properties of the proposed distribution are derived, and estimators of the unknown parameters of the proposed distribution are derived using the Maximum Likelihood (MLE) method. The study was applied to a sample size of 100 observations representing the angles of posterior corneal curvature of the eye. It was concluded that the proposed distribution is more efficient in representing circular data compared to the semi-circular solid-state Pareto-Weibel model and the semi-circular solid-state gamma distribution, based on the Akaike criterion (AIC), the Bayes-Akaike test (BIC), and the consistent Akaike test (CAIC), After the proposed distribution passes the real-data fit test according to the chi-square test.

Keywords: Maximum likelihood method, family of stereographic semicircular distributions.

1-المقدمة

تُمثل البيانات الدائرية كنقاط تقع على محيط دائرة الوحدة. توجد البيانات الدائرية في مختلف المجالات مثل الطب والفلك وعلوم الارض والعلوم الجيولوجية وعلوم الفضاء والتي يمكن تمثيلها في أي نقطة تقع على دائرة الوحدة بالأحداث الديكارتيّة (x,y) وبالأحداث النصف قطرية (θ,r) حيث أن r تمثل المسافة بين محيط الدائرة ونقطة الاصل.

وتم تطوير العديد من التوزيعات المحولة والموسعة والمركبة الخطية والدائرية وتطبيقها في عدة مجالات ولا سيما في المجال الطبي والهندسي، ففي عام (2014) اقترح الباحثان [Cordeiro., & Ortega] عائلة توزيعات Exponentiated Half-Logistic Family وهي مزيج من العائلة الاسية وتوزيع وييل وتم دراسة الخصائص الاحصائية والهيكلية للعائلة المقترحة [9] وفي عام (2013) اقترح الباحثان [Alzagal., & Lee] عائلة توزيعات Exponentiated [10]TX family، وفي عام (2016) اقترح الباحثون [Hassan, A. S., & Elgarhy, M] عائلة Exponentiated [11] new family of exponentiated Weibull-generated family، وفي عام (2017) اقترح الباحثون [Cordeiro, et al.] عائلة Exponentiated Weibull-H family of distributions [12] حيث ان جميع الدراسات التي تم ذكرها تهدف الى توسعة التوزيعات الاحتمالية بهدف تفسير البيانات المعقدة ومع ذلك لا يزال هنالك العديد من المشاكل المهمة التي لا تفسر بواسطة التوزيعات الحالية وهو ما يدفعنا للبحث عن توزيعات أكثر مرونة وأكثر انسجام مع هذه المشاكل. ومن أهم المشاكل التي تثير الاهتمام هي مشكلة السلوك المعقد للبيانات الدائرية والتي لا تتخذ شكلا ثابتا أو سلوكا معيناً كونها تتذبذب بشكل غير ثابت. من هنا جاءت فكرة إيجاد عائلة الإسقاط الاسي المجسم شبه الدائري Exponentiated stereographic Semicircular projection لتوليد توزيعات احتمالية شبه دائرية وهي تركيب من العائلة الاسية وعائلة الإسقاط المجسم العكسي شبه الدائري، واشتقاق الخصائص الاحصائية للعائلة المقترحة وتطبيقها على توزيع فريجت.

2-مشكلة البحث

تتمثل مشكلة البحث بالسلوك المعقد للبيانات الدائرية التي لا تتخذ شكلاً ثابتاً أو سلوكاً معيناً مما يجعل تحليل هذه البيانات باستعمال التوزيعات الدائرية غير ذي جدوى.

3-هدف البحث

يهدف البحث الى

- ❖ اقتراح عائلة إسقاط مجسم عكسي أسّي شبه دائري واشتقاق الخصائص الهيكلية لهذه العائلة.
- ❖ تطبيق هذه العائلة على توزيع فريجت للحصول على توزيع فريجت الاسي المجسم شبه الدائري .

(Circular Statistics)

4 - الاحصاء الدائري

يهتم الاحصاء الدائري بالبيانات الاتجاهية, ويشير المتجه (r) الى نقطه على الدائرة . يركز التحليل الدائري الاتجاهي على تحديد موقع النقطة واتجاهها. تشير البيانات الدائرية إلى البيانات التي يتم قياسها على مقياس دائري ، مما يعني أن القيم تمثل الاتجاهات أو الزوايا مثل البوصلة واتجاهات الرياح والوقت من اليوم والظواهر البيولوجية أو السلوكية الدورية إذ يمكن تمثيل الاتجاه كنقاط على محيط دائرة الوحدة أو متجهات وحدة تربط نقطة الأصل بهذه النقاط يتم تمثيل البيانات الدائرية باستعمال الزوايا أو الاتجاهات ، وغالباً ما يتم قياسها بنصف القطر أو الدرجات. ومع ذلك ، ينشأ التحدي بسبب الطبيعة الدورية للبيانات الدائرية ، حيث تكون القيمة عند 0 درجة مكافئة للقيمة عند 360 درجة والتوزيع الدائري المعروف أيضاً بالتوزيع الاتجاهي ، هو توزيع احتمالي يصف احتمال وقوع حدث أو متغير عشوائي على مقياس دائري. يتم استعماله لنمذجة البيانات التي يتم قياسها في الزوايا أو الاتجاهات ، حيث تلتف القيم بطريقة دائرية بحيث يكون المدى للمتغير العشوائي الدائري هو $(-\pi, \pi)$ او $(0, \pi)$ ويقسم الى توزيعات دائرية منقطعة والتي تعين كتلة احتمالية قابلة للعد والتي تسمى بالتوزيعات الشبكية الدائرية , وتوزيعات دائرية مستمرة . لدالة الكثافة الاحتمالية الدائرية للمتغير العشوائي الدائري θ الخصائص الآتية: [4]

1. $f(\theta) \geq 0$
2. $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = 1, -\infty < \theta < \infty$
3. $f(\theta) = f(\theta + c. 2\pi)$

(Exponentiated family)

5- العائلة الاسية

تم تقديم العائلة الاسية (Exponentiated family) من قبل [Gupta وآخرون] في عام 1988 كوسيلة لتوسعة التوزيعات المعروفة عن طريق إضافة معلمة إضافية إلى دالة التوزيع الاساس. وتحويلها الى توزيعات توفر مجموعة أدوات للسيطرة على التواء وتفلطح التوزيع من أجل ان تناسب البيانات الحقيقية. اذا كان للتوزيع الاحتمالي الاساس دالة توزيع تراكمي (cdf) تأخذ الرمز $G(x)$ ، فإن المتغير العشوائي (x) يكون محولاً بواسطة الدالة الاسية إذا كان له $F(x)$ كما في المعادلة (1): [8]

$$F(x) = [G(x)]^\beta, \quad \beta \geq 0 \quad (1)$$

حيث إن β تمثل معلمة التحويل.

و إن $G(x)$ تمثل (cdf) للتوزيع الاساس.

وباشتقاق الصيغة آنفاً نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية (pdf):

$$f(x) = \beta[G(x)]^{\beta-1}g(x), \quad \beta \geq 0 \quad (2)$$

حيث أن $g(x)$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاساس.

ومن الجدير بالذكر أن التوزيع الناتج يمثل دالة كثافة احتمالية يطلق عليه اسم التوزيع الاسي المحول, وباستعمال هذا التحويل تم اشتقاق العديد من التوزيعات .

(stereographic projection Semicircular)

6. الاسقاط المجسم لتوليد التوزيعات شبه الدائرية

[SSD]

تُعد طريقة الإسقاط المجسم العكسية طريقة لإسقاط المتغير العشوائي من خط الأعداد الحقيقية إلى البيانات الاحداثية على دائرة الوحدة بحيث يمكن استخدام الاحصاءات الدائرية لإنشاء التوزيعات الدائرية أو النصف دائرية عن طريق دالة تحويل تحول البيانات من على خط الأعداد الحقيقية إلى بيانات اتجاهية مقاسة بالزوايا .
 إذا كان لدينا المتغير العشوائي X المقاس على خط الأعداد الحقيقية R فعند إسقاط خط من نقطة من نقاط المتغير العشوائي X إلى دائرة الوحدة فإن هذا الخط يصنع زاوية في نقطة تقاطع الخط المماس مع محيط دائرة الوحدة فإن طريقة الإسقاط العكسية تتم من خلال المعادلة 3 [6] :-

$$x = v \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (3)$$

وان الدالة العكسية للدالة (3) هي:

$$T^{-1}(x) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{x}{v} \right) \quad (4)$$

فان التوزيع نصف الدائري المجسم الذي يرمز له بالرمز SSD يمكن الحصول عليه باستعمال تقنية إسقاط العكسي المجسم عن طريق التحويل الآتي:

$$F(\theta) = G \left(v \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \quad ; 0 < \theta < \pi \quad (5)$$

اذ ان $G(x)$ هي دالة الكتلة أو الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأصلي (c.d.f)

$F(\theta)$ دالة الكتلة أو الكثافة التراكمية لتوزيع Stereographic Distribution

يتم أيجاد الدالة الاحتمالية للتوزيع نصف الدائري المجسم من الدالة الاحتمالية للتوزيع الأصلي الخطي عن وفقا للقاعدة 6:

$$f(\theta) = \frac{v}{2} g \left(v \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \sec^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (6)$$

اذ ان:

$G(x)$ هي دالة الكتلة أو الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأصلي (c.d.f).

$f(\theta)$ دالة الكتلة أو الكثافة الاحتمالية للتوزيع المجسم.

7 – عائلة توزيع الإسقاط المجسم الأسّي شبه الدائري المقترحة

Proposed Exponential stereographic projection Semicircular Distribution (ESSD)

إذا كان للمتغير X توزيعا احتماليا أساسيا بدالة توزيع تراكمي $G(x)$ ، فإن المتغير العشوائي X يكون محولا بواسطة (ESSD) إذا كان له $F(x)$ من خلال الاعتماد على المعادلة 1 والمعادلة 2 حسب الشكل البسيط الآتي: [7] [5]

$$F(\theta) = \left[G \left(v \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right]^\beta \quad (7)$$

اذ ان:

$G(x)$ هي دالة الكتلة أو الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأصلي

$F(\theta)$ دالة الكتلة أو الكثافة الاحتمالية لتوزيع Stereographic Distribution.

يمكن أيجاد الدالة الاحتمالية للعائلة المقترحة (ESSD) من خلال اشتقاق المعادلة 7 وحسب المعادلة 8:

$$g(\theta) = \beta \left[G \left(v \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right]^{\beta-1} \frac{v}{2} g \left(v \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \sec^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (8)$$

ويمكن الحصول على دالة البقاء لعائلة توزيعات (ESSD) المقترحة من خلال المعادلة 9 :-

$$S(\theta) = 1 - \left[G \left(v \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right]^\beta \quad (9)$$

اما دالة المخاطرة لعائلة توزيعات (ESSD) المقترحة تكون كما في المعادلة 10 :-

$$h(\theta) = \frac{\beta \left[G \left(v \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right]^{\beta-1} \frac{v}{2} g \left(v \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \sec^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}{1 - \left[G \left(v \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right]^\beta} \quad (10)$$

8. دالة التوليد لعائلة (ESSD)

لغرض تحويل الأرقام (البيانات) المولدة في الجانب التطبيقي الى بيانات تتبع توزيعات عائلة (ESSD) بالاعتماد على طريقة التحويل المعكوس وحسب المعادلة

$$\theta = Q(u) = F^{-1}(u), 0 < u < 1$$

$$\theta = 2 \text{ Arc Tan} \left[v F^{-1} u^{\frac{1}{\beta}} \right] \quad (11)$$

9 - توزيع فريجت الاسي شبه الدائري للإسقاط المجسم.

Exponentiated stereographic projection Semicircular Fréchet Distribution (EI SSFD)

تم تقديم توزيع فريجت من قبل موريس فريشت (1973). وهو التوزيع العكسي لتوزيع وبيبل الذي شاع استعماله لنمذجة وتحليل العديد من الظواهر الطبيعية مثل الزلازل والفيضانات, وسقوط الامطار, واستعمل في تحليل ونمذجة السلوك الاحصائي لقياس معدلات الفشل المرتبطة ارتباطاً وثيقاً بدراسة دوال الفشل.

يُعبّر عن دالة الكثافة التراكمية التجميعية و دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريجت كما 12 و 13 [7]

$$F(x, \delta, \rho) = e^{-\left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} \quad (12)$$

$$f(x, \delta, \rho) = \frac{\delta}{\rho} \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\delta+1} e^{-\left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} \quad ; x, \delta, \rho > 0 \quad (13)$$

إذ أن: $\rho > 0$ معلمة الشكل Shape Parameter

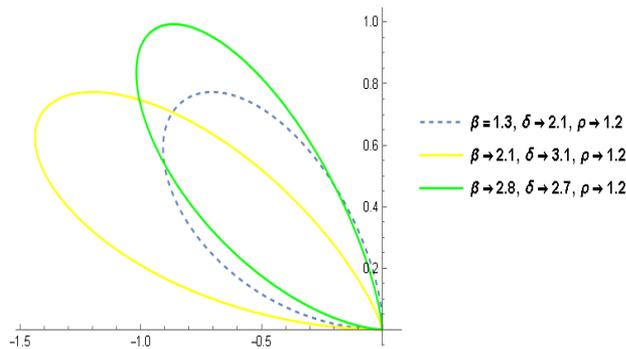
$\delta > 0$ معلمة القياس Scale Parameter

يتم الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المقترح (EI SSFD) وذلك بتعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فريشت 13 باستعمال الصيغة المعرفة بالمعادلة 8 نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية الجديدة للتوزيع المقترح (المعادلة 14) :

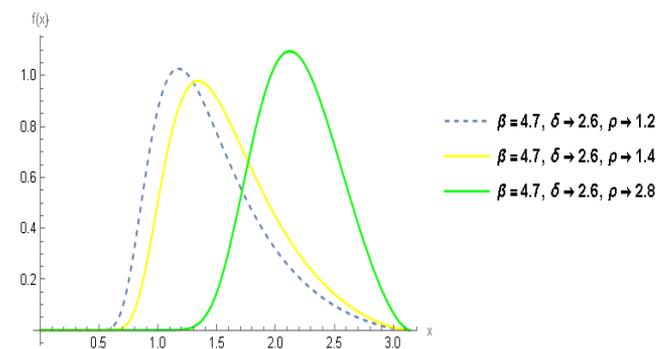
$$g(\beta, \rho, \delta, \theta) = \frac{\delta\beta v}{2\rho} \left[e^{-\left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^\delta} \right]^{\beta-1} \left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^{\delta+1} e^{-\left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^\delta} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad x, \delta, \rho, \beta > 0 \quad (14)$$

والشكل 1 يوضح سلوك الدالة الاحتمالية للتوزيع المقترح (EI SSFD) في كلا الحالتين الخطية والدائرية

PDF Exponentiated Stereographic Semicircular Fréchet distribution



PDF Exponentiated Stereographic Semicircular Fréchet distribution



الشكل 1 يوضح سلوك الدالة الاحتمالية للتوزيع المقترح (EI SSFD) في الحالتين الخطية والدائرية

وبتكامل الدالة 14 وباقتراض ان

$$x = v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{v}\right), \quad d\theta = \frac{2}{v + x^2} dx, \quad \sec^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{v}\right) = \frac{x^2}{v^2} + 1$$

يمكن إثبات ان دالة التوزيع 14 هي دالة توزيع احتمالي .

يتم الحصول على دالة الكثافة التراكمية للتوزيع المقترح (E SSFD) بتعويض دالة الكثافة التراكمية لتوزيع فريشت 14 باستعمال الصيغة المعرفة بالمعادلة 7 فنحصل على الدالة الكثافة التراكمية الجديد للتوزيع المقترح كما في الصيغة الاتي :

$$G(\theta, \delta, \rho, \beta) = e^{-\beta \left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^\delta} ; x, \delta, \rho, \beta > 0 \quad (15)$$

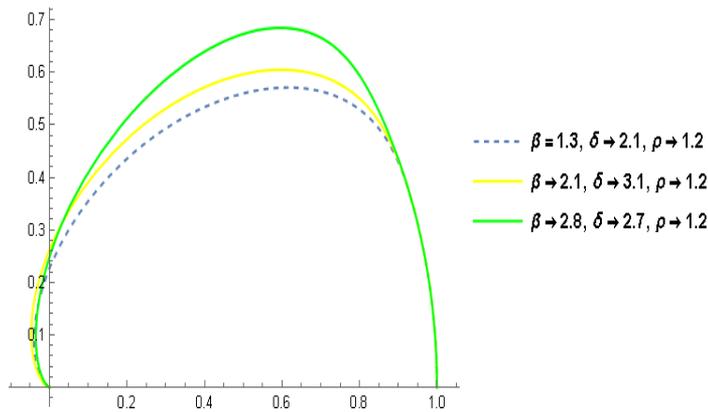
والشكل 2 يوضح سلوك الدالة التراكمية للتوزيع المقترح (EI SSFD) في الحالتين الخطية والدائرية

الشكل 2 سلوك الدالة التراكمية للتوزيع المقترح (EI SSFD) في الحالتين الخطية والدائرية وان دالة البقاء او دالة المعولية لتوزيع (EI SSFD) كما في المعادلة 16:

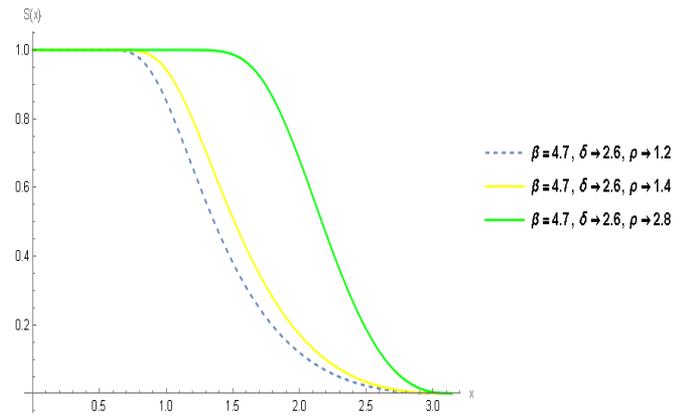
$$S(\theta, \delta, \rho, \beta) = 1 - e^{-\beta \left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^\delta} \quad (16)$$

والشكل 3 يوضح سلوك دالة البقاء للتوزيع المقترح (EI SSFD) في كلا الحالتين الخطية والدائرية

SurvivalFunction Exponentiated Semicircular Fréchet distribution



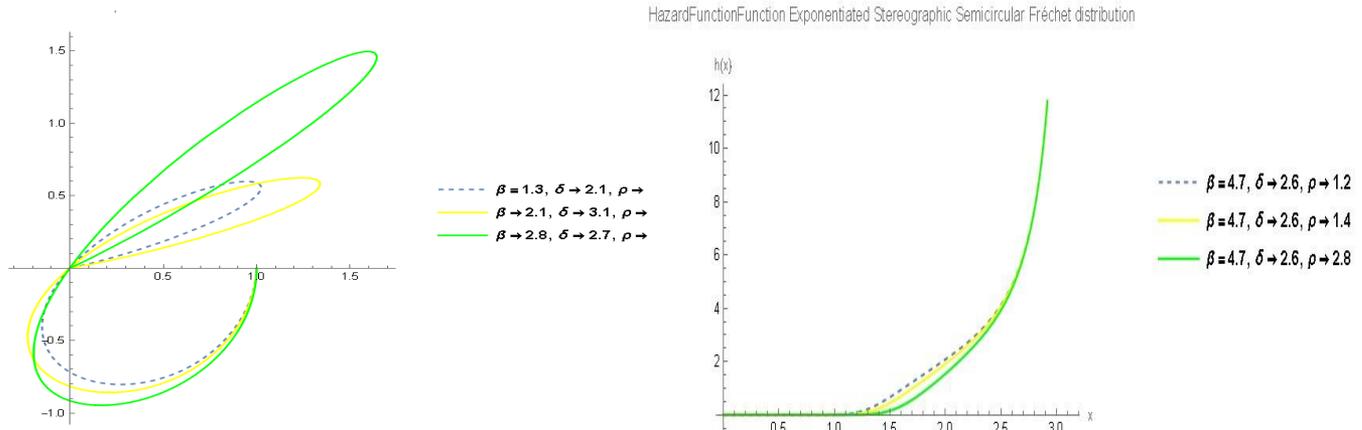
SurvivalFunction Exponentiated Stereographic Semicircular Fréchet distribution



الشكل 3 سلوك دالة البقاء للتوزيع المقترح (EI SSFD) في كلا الحالتين الخطية والدائرية وان دالة المخاطرة لتوزيع (EI SSFD) كما في 17:

$$h(\theta, \delta, \rho, \beta) = \frac{\frac{\delta\beta v}{2\rho} \left[e^{-\left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^\delta} \right]^{\beta-1} \left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^{\delta+1} e^{-\left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^\delta} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - e^{-\beta\left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^\delta}} \quad (17)$$

والشكل 4 يوضح سلوك دالة المخاطرة للتوزيع المقترح (EI SSFD) في كلا الحالتين الخطية والدائرية



الشكل 4 سلوك دالة المخاطرة للتوزيع المقترح

9- خصائص توزيع EI SSFD بالاعتماد على الخصائص المثلثية : [6]

$$\begin{aligned} \phi_p &= \alpha_p + i\beta_p, & \phi_p &= 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3 \dots \dots \\ \alpha_p &= E(\cos(p\theta)) \\ \beta_p &= E(\sin(p\theta)) \end{aligned}$$

حيث أن الجزء الحقيقي للعزوم المثلثية :

$$\alpha_1 = \frac{\delta\beta v}{2\rho} \int_0^\pi \cos(\theta) e^{-\beta\left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\delta+1} \sec^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{x}{v}\right)\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{v^2 + x^2}} dx$$

بعد اجراء التبسيطات السابقة نستنتج ان

$$\alpha_1 = \frac{\delta\beta}{\rho} \int_0^\infty \cos(\theta) e^{-\beta\left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\delta+1} . dx$$

وحيث ان

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{2x^2}{1+x^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\delta\beta}{\rho} \int_0^\infty \left(1 - \frac{2x^2}{1+x^2}\right) e^{-\beta\left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\delta+1} . dx$$

$$\alpha_1 = 1 - 2\delta\beta\rho^\delta e^{-\rho^\delta} \int_0^\infty x^{2\left(\frac{-\delta}{2}+1\right)-1} (1+x^2)^{-1} e^{-\beta x^{-\delta}} \cdot dx$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل التالي

$$= \int_0^\infty x^{2v-1} (u^2 + x^2)^{Q-1} e^{-\mu x} dx = \frac{u^{2v+2Q-2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(1-Q)} G_{13}^{31} \left(\frac{\mu^2 u^2}{4} \middle| \begin{matrix} 1-v \\ 1-Q-v, 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right)$$

$$v = 2, u^2 = 1, Q = 0, \mu = \sigma$$

يسمى المقدار Meijer's G-function دالة $G_{13}^{31} \left(\frac{\mu^2 u^2}{4} \middle| \begin{matrix} 1-v \\ 1-Q-v, 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right)$

$$= \int_0^\infty x^{2v-1} (u^2 + x^2)^{Q-1} e^{-\mu x} dx = \frac{u^{2v+2Q-2}}{2\sqrt{\pi}\Gamma(1-Q)} G_{13}^{31} \left(\frac{\mu^2 u^2}{4} \middle| \begin{matrix} 1-v \\ 1-Q-v, 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right)$$

$$\alpha_1 = 1 - 2\delta\beta\rho^\delta \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \middle| \begin{matrix} \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2}, 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right) \right)$$

$$\beta_1 = \frac{\delta\beta}{\rho} \int_0^\infty (\sin(\theta)) e^{-\beta\left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\delta+1} \cdot dx$$

$$\beta_1 = \frac{\delta\beta}{\rho} \int_0^\infty \left(\frac{2x^2}{1+x^2} \right) e^{-\beta\left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\delta+1} \cdot dx$$

$$\beta_1 = 2\delta\beta\rho^\delta e^{\rho^\delta} \int_0^\infty x^{2\left(\frac{-\delta}{2}+\frac{1}{2}\right)-1} (1+x^2)^{0-1} e^{-\beta x^{-\delta}} \cdot dx$$

$$\beta_1 = \int_0^\infty x^{2v-1} (u^2 + x^2)^{Q-1} e^{-\mu x} dx = 2\delta\beta\rho^\delta e^{\rho^\delta} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \middle| \begin{matrix} \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{\delta\beta v}{2\rho} \int_0^\pi \cos 2\theta e^{-\beta\left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\delta+1} \sec^2 \left(\tan^{-1} \left(\frac{x}{v} \right) \right) \cdot \frac{2}{v+x^2} dx$$

$$\cos 2\theta = 1 + \frac{8x^4}{(1+x^2)^2} - \frac{8x^2}{(1+x^2)}$$

$$= \frac{\delta\beta}{\rho} \int_0^\infty \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\delta+1} e^{-\beta\left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} + \frac{8x^4}{(1+x^2)^2} \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\delta+1} e^{-\beta\left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} - \frac{8x^2}{(1+x^2)} \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\delta+1} e^{-\beta\left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} dx$$

$$= \left(1 + \frac{\delta\beta\rho^{\delta+1} e^{-\rho^\delta}}{\rho} \int_0^\infty x^{2\left(\frac{-\delta}{2}+2\right)-1} (1+x^2)^{-1-2} e^{-\beta x^{-\delta}} dx \right. \\ \left. - \frac{8\delta\beta\rho^{\delta+1} e^{-\rho^\delta}}{\rho} \int_0^\infty x^{2\left(\frac{-\delta}{2}+1\right)-1} (1+x^2)^{0-1} e^{-\beta x^{-\delta}} dx \right)$$

$$\alpha_2 = \left(1 + \frac{\delta 8 \beta \rho^{\delta+1} e^{-\rho^\delta} e^{-\rho^\delta}}{\rho} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(2)} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \begin{matrix} \frac{\delta}{2} - 1 \\ \frac{\delta}{2} - 2, 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) \right. \\ \left. - \frac{8 \delta \beta \rho^{\delta+1} e^{-\rho^\delta}}{\rho} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(1-Q)} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \begin{matrix} \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2}, 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) \right)$$

$$\beta_2 = \frac{\delta \beta}{\rho} \int_0^\infty (\sin 2\theta) e^{-\beta \left(\frac{\rho}{x}\right)^\delta} \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\delta+1} . dx$$

$$\sin 2\theta = \frac{4x}{(1+x^2)} - \frac{8x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$\beta_2 = \frac{e^{-\rho^\delta} \rho^{\delta+1} \delta \beta 4}{\rho} \int_0^\infty \frac{xx^{-\delta-1}}{(1+x^2)} e^{-\beta x^{-\delta}} . dx - \frac{8 \rho^{\delta+1} \delta \beta e^{-\rho^\delta}}{\rho} \int_0^\infty \frac{x^3 x^{-\delta-1}}{(1+x^2)^2} e^{-\beta x^{-\delta}} . dx$$

$$\beta_2 = \frac{e^{-\rho^\delta} \rho^{\delta+1} \delta \beta 4}{\rho} \int_0^\infty x^{2\left(\frac{-\delta}{2} + \frac{1}{2}\right)-1} (1+x^2)^{0-1} e^{-\beta x^{-\delta}} . dx$$

$$- \frac{8 \rho^{\delta+1} \delta \beta e^{-\rho^\delta}}{\rho} \int_0^\infty x^{2\left(\frac{-\delta}{2} + \frac{3}{2}\right)-1} (1+x^2)^{-1-1} e^{-\beta x^{-\delta}} . dx$$

$$\beta_2 = \frac{e^{-\rho^\delta} \rho^{\delta+1} \delta \beta 4}{\rho} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \begin{matrix} \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) - \frac{8 \rho^{\delta+1} \delta \beta e^{-\rho^\delta}}{\rho} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(2)} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \begin{matrix} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{\delta}{2} - \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right)$$

1-9 (الوسط الحسابي لتوزيع (E I SSFD)

وقد يسمى بمتوسط الاتجاه (Average direction) أو الاتجاه المفضل (preferred direction) قد يتبادر إلى الأذهان لحساب متوسط الاتجاه هو حساب الوسط الحسابي للزوايا بطريقة البيانات الاعتيادية . وهو اعتقاد خاطئ بسبب الاختلاف بطبيعة البيانات فالبيانات الدائرية تحتاج إلى تحديد نقطة الصفر و اتجاه الدوران فعلى سبيل المثال لو كانت لدينا طائرين يطيران بالزاويتين (30°, 330°) مع افتراض الشرق هو نقطة الصفر و اتجاه الدوران عكس عقرب الساعة , يمكن حساب الوسط الحسابي لتوزيع (E SSFD) المقترح من خلال الصيغة الآتية: [7]

$$\mu = \tan^{-1} \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)$$

$$\mu = \tan^{-1} \left(\frac{2 \delta \beta \rho^\delta e^{\rho^\delta} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \begin{matrix} \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right)}{1 - 2 \delta \beta \rho^\delta \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \begin{matrix} \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2}, 0, \frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) \right)} \right) \quad (18)$$

2-9 التباين الدائري لتوزيع (E SSFD)

يعتبر التباين من المقاييس التي تقيس تشتت البيانات عن نقطة معينة والتي تأخذ عادةً متوسط هذه البيانات وبالتالي فهو يقيس مقدار بعد كل نقطة من نقاط البيانات عن وسطها الحسابي ، في البيانات الدائري هناك بعدين لكل اتجاه من اتجاه البيانات عن أي اتجاه آخر سواء كان هذا الاتجاه هو اتجاه الوسط أو أي اتجاه اخر ويمكن حساب التباين الدائري للتوزيع المقترح من خلال المعادلة الصيغة الآتية :

$$v = 1 - \rho = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}$$

v

$$= \sqrt{\left(1 - 2\delta\beta\rho^\delta \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \frac{\delta}{2}, 0, \frac{1}{2} \right.\right)\right)\right)^2 + \left(2\delta\beta\rho^\delta e^{\rho^\delta} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right.\right)\right)^2} \quad (19)$$

9-3 الانحراف المعياري الدائري لتوزيع (E SSFD)

الانحراف المعياري في البيانات الاعتيادية هو الجذر التربيعي للتباين أما في البيانات الدائرية فمن غير المستحسن اخذ جذر التباين وذلك لان اغلب البيانات الدائرية تتبع توزيعات متماثلة وغير مشتتة والحصول على تقديرات معقولة لنسب هذا التوزيع ولحسابه الانحراف المعياري الدائري للتوزيع المقترح نستعمل الصيغة الآتية: [6]

$$\sigma = \sqrt{-\log(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}$$

σ

$$= \sqrt{-\log \left(\left(1 - 2\delta\beta\rho^\delta \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \frac{\delta}{2}, 0, \frac{1}{2} \right.\right)\right)\right)^2 + \left(2\delta\beta\rho^\delta e^{\rho^\delta} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right.\right)\right)^2 \right)} \quad (20)$$

9-4 معامل الالتواء للتوزيع المقترح

هو درجة عدم التماثل والانحراف عن التماثل، فإذا كان منحني توزيع الشكل العام للبيانات له طرف على يمين مركز التوزيع أطول من الطرف الايسر، فان التوزيع يسمى ملتوي لليمين وأن له التواء موجباً، وإذا حدث العكس يقال إن التوزيع ملتوي لليسار وأنه سالب الالتواء ويمكن الدائري للتوزيع المقترح نستعمل الصيغة الآتية :

$$\text{coefficient of skewness} = \frac{\beta_2}{(V_0)^{\frac{3}{2}}}$$

coeff. of skew

$$= \frac{\frac{e^{-\rho^\delta} \rho^{\delta+1} \delta \beta^4}{\rho} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right.\right) - \frac{8\rho^{\delta+1} \delta \beta e^{-\rho^\delta}}{\rho} \frac{1}{2\sqrt{\pi} \Gamma(2)} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right.\right)}{\left(\left(1 - 2\delta\beta\rho^\delta \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \frac{\delta}{2}, 0, \frac{1}{2} \right.\right)\right)\right)^2 + \left(2\delta\beta\rho^\delta e^{\rho^\delta} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} G_{13}^{31} \left(\frac{\beta^2}{4} \left| \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right.\right)\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (21)$$

(Maximum Likelihood Method)

10- طريقة الإمكان الأعظم ML:

تُعدُّ من طرائق التقدير التقليدية [5] المهمة في عملية التقدير وأكثرها استخداماً كونها تتمتاز بخصائص جيدة منها الكفاية والثبات والاتساق وتكون أكثر دقة عندما يكون حجم العينة كبير، وان مبدأ وهدف هذه الطريقة هو ايجاد قيم تقديرية للمعلمات التي نريد تقديرها وذلك بجعل دالة الامكان في نهايتها العظمى

لتكن x_1, x_2, \dots, x_n مشاهدات عشوائية لعينة حجمها n تتبع التوزيع المقترح ESSFD فان دالة الإمكان للمشاهدات يمكن صياغتها بالشكل الآتي [1][3]:

$$L(\theta_1, \theta_2, \theta_n, \beta, \rho, \delta) = f(\theta_1, \beta, \rho, \delta) \cdot f(\theta_2, \beta, \rho, \delta) \cdot f(\theta_3, \beta, \rho, \delta) \dots f(\theta_n, \beta, \rho, \delta)$$

تعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (E SSFD) في الصيغة المذكورة آنفاً:

$$L_f(\theta_i, \beta, \rho, \delta) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\delta \beta v}{2\rho} \left[e^{-\left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^\delta} \right]^{\beta-1} \left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^{\delta+1} e^{-\left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^\delta} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (22)$$

وبأخذ اللوغارتم لهذه الدالة يكون لدينا:

$$\log L_f(\theta_i, \beta, \rho, \delta) = \left\{ n \log \frac{[\delta \beta]}{v n \rho} - (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log \left[\left(\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)} \right)^\delta \right] + \sum_{i=1}^n ((\delta + 1) \log \left[\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)} \right] - \delta \log \left[\frac{\rho}{v \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)} \right] + \left[\sec^2 \frac{\theta_i}{2} \right]) \right\} \quad (23)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للصيغة (23) بالنسبة للمعلمات (β, ρ, δ) ومساواتها الى الصفر نحصل على :-

$$\frac{\partial \log L}{\partial \delta} \frac{\partial \ln(L)}{\partial \rho} = \left\{ -\frac{n}{\rho} - \frac{n(-1 + \beta)\delta}{\rho} + \frac{n(1 + \delta)}{\rho} \right\} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \beta} = \left\{ \frac{n}{\beta} - n \log \left[\left(\frac{\rho \cot\left[\frac{\theta}{2}\right]}{v} \right)^\delta \right] \right\} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \delta} = \left\{ \frac{n}{\delta} + n \log \left[\frac{\rho \cot\left[\frac{\theta}{2}\right]}{v} \right] - n(-1 + \beta) \log \left[\frac{\rho \cot\left[\frac{\theta}{2}\right]}{v} \right] \right\} = 0 \quad (26)$$

المعادلات (24) و(25) و(26) لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لأنها معادلات غير خطية ولذلك يتم حلها باستعمال الطريقة العددية للحصول على مقدرات معلمات التوزيع المقترح بطريقة الامكان الاعظم، وتعويض قيم المقدرات $(\hat{\rho}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE}, \hat{\delta}_{MLE})$ في دالة البقاء نحصل على مقدر الامكان الاعظم لهذه الدالة.

11- الجانب التطبيقي:

جمعت البيانات لعدد من المصابين بمرض التهابات الجهاز التنفسي من سجلات دائرة مستشفى الحسين التعليمي في محافظة كربلاء المقدسة قسم الحميات والبالغ عددها (100) مشاهدة تمثل زوايا انحناء القرنية الخلفي للعيون اذ تم تبويب البيانات للأشخاص المصابين وكما يلي:

1.97	1.77	2.39	1.34	0.86	1.6	1.51	1.8	2.55	1.69
1.8	2.31	1.32	1.63	1.18	1.65	1.33	1.65	2.55	1.69
1.41	0.67	1.53	1.32	1.09	14.2	1.43	1.32	2.57	1.7
1.67	1.64	0.76	1.37	1.08	1.87	2.08	1.47	2.6	1.7
2.3	1.55	0.87	1.42	0.76	1.31	1.58	1.85	2.6	1.72
1.6	2.08	2.41	1.85	1.76	1.64	0.65	1.42	2.65	1.72
2.02	2.34	2.42	1.75	1.68	1.76	1.86	1.86	2.68	1.75
1.77	1.31	2.19	1.63	1.78	1.98	1.87	1.75	2.69	2.3
1.76	2.2	1.65	1.74	1.98	1.86	1.65	1.76	2.7	2.3
2.05	1.97	1.59	1.64	2.1	2	1.54	1.65	2.7	2.5

جدول (4) زوايا انحناء القرنية الخلفي لعيون

تم اجراء اختبار حسن المطابقة لتوزيع البيانات وفقا للتوزيع المقترح باستعمال اختبار مربع كاي, وجد ان $\alpha = 0.096$, وعليه لا نرفض فرضية العدم وبالتالي فان البيانات تتوزع وفقا لتوزيع فريشت المجسم نصف الدائري المتسارع.

12 - معايير اختبار افضل توزيع: (Criteria choosing the best distribution)

1-12 اختبار أكايكي AIC^[2]

$$AIC = -2L(\hat{\theta} \setminus X) + 2P \tag{27}$$

P : تمثل عدد المعلمات في دالة التوزيع الاحتمالية النظرية.

$L(\hat{\theta} \setminus X)$: تمثل لوغاريتم دالة الترجيح (Log Likelihood Function) لمشاهدات بيانات العينة.

2-12 اختبار بيز أكايكي

:

$$BIC = -2L(\hat{\theta} \setminus x) + P \text{Log}(n) \tag{28}$$

$L(\hat{\theta} \setminus X)$: تمثل لوغاريتم دالة الترجيح (Log Likelihood Function) لمشاهدات بيانات العينة.

P: تمثل عدد المعلمات في دالة التوزيع الاحتمالية النظرية.

n: تمثل حجم العينة.

3-12 اختبار أكايكي المتسق CAIC

$$CAIC = -2L(\hat{\theta} \setminus x) + \frac{2nP}{n - P - 1} \tag{29}$$

اذ ان n: تمثل حجم العينة.

والجدول 6 يبين معايير المفاضلة بين التوزيع المقترح وتوزيعات اخرى في تمثيل البيانات الحقيقية جدول (6) معايير المفاضلة بين التوزيع المقترح وتوزيعات اخرى في تمثيل البيانات الحقيقية

dist	Parameter estimation			Logl	AIC	AICc	BIC
	β	ρ	δ				
Exponentiated stereographic projection Semicircular Fréchet Distribution	2.5	0.9	1.24	239.22	239.56	239.838	245. 831
Stereographic Semicircular New Weibull Pareto	0.3	3.3		324.858	324.558	324.654	324.551

Stereographic Semicircular Gamma Distribution	1.5	2.4		355.949	355.848	355.69	355.843
---	-----	------------	--	---------	---------	--------	---------

من الواضح من الجدول 6 ان توزيع فريشت المجسم نصف الدائري المتسارع هو الأفضل لأنه يملك أقل قيمة للمعايير الثلاثة.

12-الاستنتاجات:

1. من خلال الجانب النظري نستنتج مرونة العائلة المقترحة لتوليد التوزيعات الاحتمالية وسهولة التعامل معها.
2. من نتائج التطبيق العملي وعن طريق اختبارات حسن المطابقة (Goodness of fit) وجد أن التوزيع الاحتمالي المقترح يمثل ويصف البيانات الحقيقية افضل من توزيع ليندلي ، وهذا يعكس أهمية التوزيعات الدائرية مقارنة بالتوزيعات الاحتمالية الاصلية.

1. استعمال طريقة الامكان الاعظم في تقدير معالم لتوزيع Exponentiated stereographic projection Semicircular Fréchet Distributio

2. تطبيق النموذج الجديد المقترح Exponentiated stereographic projection Semicircular Fréchet Distributio في الجوانب الهندسية والطبية والصناعية.

المصادر العربية:

1. Tahani Mahdi, Samira Mazhar and Qutaiba Nabil (2008). “Comparing Bayesian Estimators with Maximum Likelihood Estimator in Estimating the Survival Function of Lognormal Distribution Using Type II Observed Data”. Journal of Al-Nahrain University.
2. Al-Durai'i, Mahdi Ali Abdul-Hussein (2016) “Some methods for estimating the parameters of the reliability function of a complex probabilistic model with a practical application” Master's thesis, College of Administration and Economics - University of Baghdad.

المصادر الأجنبية:

3. Ahmed AL-Bawi, H., Abood AL-Maliki, A., & Mohammed AL-Rubaye, H. (2014). Validity of exercise treadmill test in diagnosis of coronary artery disease. The Medical Journal of Basrah University, 32(2), 101-105.
4. Ali H. Abuzaid (2017): A half circular distribution for modeling the posterior corneal curvature, Communications in Statistics - Theory and Methods, DOI: 10.1080/03610926.2017.1348521.
5. Meijer's G-function (Gradstein and Ryzhik, 2007, formula no. 3.389.2). Para, B. A., & Jan, T. R. (2018). On three parameter weighted Pareto type II distribution: properties and applications in medical sciences. Applied Mathematics and Information Sciences Letters, 6(1), 13-26.
6. Yedlapalli, P., adhika Radhika, A. J. V., Girija, S. V. S., & Rao, A. D. (2017). On trigonometric moments of the stereographic semicircular gamma distribution. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 10(5), 1124-1134.
7. Yedlapalli, P., Sastry, K. L. N., & Rao, A. D. (2019). On stereographic semicircular quasi lindley distribution. *Journal of New Results in Science*, 8(1), 6-13.
8. Pal, M., Ali, M. M., & Woo, J. (2006). Exponentiated weibull distribution. *Statistica*, 66(2), 139-147.
9. Cordeiro, G. M., Alizadeh, M., & Ortega, E. M. (2014). The Exponentiated Half-Logistic Family of Distributions: Properties and Applications. *Journal of Probability and Statistics*, 2014(1), 864396.
10. Alzaghal, A., Famoye, F., & Lee, C. (2013). Exponentiated TX family of distributions with some applications. *International Journal of Statistics and probability*, 2(3), 31.
11. Hassan, A. S., & Elgarhy, M. (2016). A new family of exponentiated Weibull-generated distributions. *m*, 51, 55-71.
12. Cordeiro, G. M., Afify, A. Z., Yousof, H. M., Pescim, R. R., & Aryal, G. R. (2017). The exponentiated Weibull-H family of distributions: Theory and Applications. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(4), 155.