

استعمال صيغة التوزيع الملتف لتقدير دالة البقاء مع تطبيق عملي

Using the wrapped distribution to estimate the survival function With practical application

أ. د شروق عبد الرضا السباح
 Ass. Prof. Dr. Sherouk Abdul Redha Al-Sabbah
 Sherouk 12@gmail.com
 كلية الادارة والاقتصاد جامعة كربلاء , كربلاء , العراق

علاء سامي هادي
 Alaa Sami Hadi
 Alaa.sami@uokerbala.edu.iq
 كلية الادارة والاقتصاد جامعة كربلاء , كربلاء , العراق

المستخلص:

يقدم البحث دراسة عن اقتراح توزيع ميررا الملتف (wrapped- Mirra) كتوزيع دائري جديد يربط بين المتغير العشوائي الخطية والمتغيرات الدائرية التي تقع ضمن المدة $(0, 2\pi)$ ، اذ تم ايجاد الخصائص الاحصائية والهيكلية للتوزيع المقترح كدالة الكثافة الاحتمالية والتراكمية ودالة البقاء والمخاطرة والوسط الحسابي الدائري ومعامل الالتواء والتفرطح ومن ثم تقدير معالم التوزيع الجديد بالاعتماد على طريقة الامكان الأعظم الاعتيادية Maximum Likelihood (ML) وطريقة كرايمر فون مايسز (CVM), ولغرض المقارنة بين طرائق تقدير المعالم للتوزيع المقترح فقد تم توظيف أسلوب محاكاة مونت كارلو (Monte carlo) لإجراء عدة تجارب بأحجام عينات مختلفة (25)، (50)، (100,75) بالاعتماد على المعيار الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) أظهرت النتائج أفضلية طريقة كرايمر فون مايسز (CVM) في حساب مقدرات معالم ودالة البقاء لتوزيع (wrapped- Mirra) بشكل عام في تقدير معالم التوزيع الأحجام , وطبق التوزيع على بيانات حقيقية بواقع (100) مشاهدة تمثل زوايا الفيمور تيبيا (FTA) للأشخاص المصابين بمرض نقوس السيقان في محافظة "كربلاء وذلك بتطبيق هذه البيانات" على التوزيع المقترح باستعمال طريقة كرايمر فون مايسز (CVM) التي ظهرت أفضليتها في الجانب التجريبي من بين طرائق التقدير المستعملة .

الكلمات المفتاحية: طريقة الإمكان الأعظم ، طريقة كرايمر فون مايسز ، (wrapped distribution).

ABSTRACT:

This research came to present a study on the proposed wrapped-Mirra distribution as a new circular distribution that links the linear random variable and the circular variables that fall within the interval $(0, 2\pi)$. The statistical and structural properties of the proposed distribution were found, such as the probability and cumulative density function, the survival function, the risk, the circular arithmetic mean, the skewness coefficient, and the kurtosis. Then, the parameters of the new distribution were estimated based on the usual maximum likelihood method (ML) and the Cramer von Mises method (CVM). For the purpose of comparing the methods of estimating the parameters of the proposed distribution, the Monte Carlo simulation method was employed to conduct several experiments with different sample sizes (25, 50, 100, 75) based on the statistical criterion mean square error (MSE). The results showed the superiority of the Cramer von Mises method (CVM) in calculating the parameters and survival function estimates for the wrapped-Mirra distribution in general in estimating the distribution parameters sizes. The distribution was applied to real data of (100) observations representing the femoro-tibial angles (FTA) of people suffering from bow legs disease in Karbala Governorate by applying this data to the proposed distribution using the Cramer von Mises method (CVM), which appeared to be superior in the experimental aspect among the estimation methods used.

Key words: Maximum likelihood method, Cramer von Mises method, (wrapped distribution).

(Introduction)

1- المقدمة:

تنشأ البيانات الدائرية في العديد من المجالات العلمية، بما في ذلك علم الأحياء والجيولوجيا والجغرافيا والأرصاد الجوية والفيزياء... إلخ والتي تكون على شكل متجهات تجمعها نقطة أصل واحدة وتقاس بالقياس الزاوي إذ يمثل بعد كل متجه عن المتجه المحدد بالاتجاه الصفري و اتجاه الدوران مقدار الزاوية التي تدل على اتجاه ذلك المتجه , وأن أقل مقدار ممكن تأخذه هذه الزاوية هو الصفر درجة وأعلى مقدار هو 360 درجة. تكمن أهمية التوزيع الاحتمالي من أكبر التحديات التي نواجهها في الإحصاء هو تحديد توزيع الاحتمالات الذي يصف البيانات التي تم أخذها للدراسة بطريقة أفضل و قابلية التطبيق على العالم الحقيقي وكذلك قدرته على ملائمة البيانات بدقة وفائدته في عمل التنبؤات ورسم روى ذات

مغزى عند استعمال أي توزيع في مجال بحث معين. فكلما زادت المعرفة التي يمتلكها المرء حول توزيع الاحتمالات الأساسي، كلما كان التحليل الإحصائي والاستدلال أفضل.

ففي حالة البيانات الدائرية يجب إيجاد نموذج لغرض دراسة وتحليل مثل هكذا بيانات لذلك جاءت هذا البحث لتقديم دراسة عن إيجاد توزيع دائري جديد بالاعتماد على منهجية التوزيعات الملتفة من خلال إيجاد النموذج المقترح ومن ثم تقدير معالم التوزيع الجديد بالاعتماد على ثلاث طرائق في التقدير وهي طريقة الإمكان الأعظم الاعتيادية (Maximum Likelihood ML) وطريقة المربعات الصغرى (LS) (Least Squares method) وطريقة كريمر فون مايسز (CVM).

2- مشكلة البحث: (Problem of Research)

تتناخص مشكلة البحث في جانبين النظري والتطبيقي تمثلت مشكلة البحث أنها تسهم في تطوير تطبيق نظرية التوزيعات الملتفة (wrapped) وتحسين طرائق نمذجة البيانات الدورية في مجالات مختلفة من مجالات الحياة، إذ تستعمل البيانات الدورية في العديد من المجالات العلمية والهندسية التي تقع ضمن المدة $(0, \pi)$ ، ولذلك فإن تطوير طرائق نمذجة أكثر دقة لهذه البيانات أمر في غاية الأهمية للبيانات الدائرية، لذلك من الضروري إيجاد نموذج أو توزيع احتمالي يمثل تلك الظواهر وهذا ينطوي في ظل التوزيعات الدائرية الملتفة ، لذلك تضمنت مشكلة البحث خطوة مهمة في هذا الاتجاه، إذ تسهم في تطوير توزيع ميررا الملتف (wrapped- Mirra) ، لبناء توزيع احتمالي دائري يمكن استخدامه في نمذجة البيانات الاتجاهية الدورية فضلاً عن ذلك، يجب على الباحث أيضاً أن يكون لديه فهم جيد لتوزيع wrapped- Mirra الاحتمالي وكيف يمكن استعماله في البحث العلمي. هذا يتطلب دراسة متأنية للأدبيات الحالية والمعرفة العميقة بالموضوع بشكل عام، وان هذه المشكلة تتطلب مجموعة من المهارات والمعرفة المتخصصة، وقد يكون من الصعب تحقيقها دون الخبرة الكافية في هذا المجال ومع ذلك، عن طريق البحث الدقيق والدراسة، يمكن للباحث التغلب على هذه التحديات وتحقيق النتائج المرجوة، لإيجاد نموذج أو توزيع احتمالي يمثل تلك الظواهر وهذا ينطوي في ظل التوزيعات الملتفة التي تقع ضمن المدة $(0, \pi)$ معالم وذلك لتحسين التوزيع الأصلي الخطي وملاءمته مع الظواهر الدائرية.

3- هدف البحث: (Aim of Research)

- 1- بناء توزيع احتمالي جديد بالاعتماد على أسلوب التوزيعات الملتفة والذي يختص بتحويل التوزيعات الخطية إلى توزيعات دائرية .
- 2- دراسة كيفية توظيف أسلوب التوزيعات الملتفة في بناء توزيع wrapped- Mirra هو واستكشاف القدرة على استعمال التوزيعات الملتفة في بناء توزيع wrapped- Mirra الاحتمالي.
- 3- اشتقاق خصائص التوزيع المقترح وتقدير معالمه ودالة البقاء بطرائق مختلفة (طريقة الإمكان الأعظم (MLE) وطريقة كريمر فون مايسز (CVM).
- 4- اختيار أفضل طريقة لمقدرات معالم توزيع wrapped- Mirra وذلك بالاعتماد على المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) وباستعمال أسلوب المحاكاة واحجام عينات مختلفة.

4- الإحصاء الدائري (Circular Statistics)

الإحصاء الدائري هو فرع من فروع الإحصاء يتعامل مع البيانات المقاسة بالدرجات أو الراديان بزوايا أو اتجاهات، وعلى عكس الإحصاء الخطي، الذي يركز على نقاط البيانات على طول خط مستقيم، فإن الإحصاء الدائري يعالج التحديات الفريدة التي تفرضها البيانات الملتفة، مثل اتجاهات البوصلة، أو الوقت من اليوم، أو أي ظاهرة دورية. يستخدم الإحصاءات الدائرية في مجالات مختلفة، ففي علم الأرصاد الجوية، على سبيل المثال، تُستخدم لتحليل بيانات اتجاه الرياح، مما يساعد خبراء الأرصاد الجوية على فهم أنماط الرياح السائدة، وفي علم الأحياء، قد يستخدم الباحثون الإحصاءات الدائرية لدراسة أنماط حركة الحيوانات، مثل طرق الهجرة أو سلوك البحث عن الطعام، حيث يكون الاتجاه عاملاً رئيسياً. بالإضافة إلى ذلك، في مجال علم النفس، يمكن استخدام الإحصاءات الدائرية لتحليل تأثيرات الوقت من اليوم على السلوك، مما يوفر رؤى حول الإيقاعات اليومية.^[4]

5- التوزيعات الدائرية (Circular Distribution)

التوزيع الدائري، المعروف أيضاً باسم التوزيع الاتجاهي، هو توزيع احتمالي يصف احتمال وقوع حدث أو متغير عشوائي على مقياس دائري. يتم استعماله لنمذجة البيانات التي يتم قياسها في الزوايا أو الاتجاهات، حيث تلتف القيم بطريقة دائرية بحيث يكون المدى للمتغير العشوائي الدائري الاحتمالية التوزيعات وتنقسم $(-\pi, \pi)$ أو $(0, 2\pi)$ هو (Circular Random (Iariable) إلى قسمين، الأول توزيعات دائرية متقطعة والتي تعين كثلة احتمالية قابلة للعد والتي تسمى بالتوزيعات الشبكية الدائرية، الثاني توزيعات دائرية مستمرة وتكون لها دالة الكثافة الاحتمالية الدائرية للمتغير العشوائي الدائري θ لها الخصائص الآتية:

$$1. f(\theta) \geq 0$$

$$2. \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 1, -\infty < \theta < \infty$$

$$3. f(\theta) = (\theta + c) \cdot 2\pi$$

التوزيعات الدائرية ، يتم توزيع الاحتمال عبر الدائرة بأكملها ، وتكرر القيم بعد دورة كاملة.^[3]

6-قاعدة (wrapped distributions)

تستخدم الاحصاءات الدائرية لانشاء التوزيعات الدائرية او النصف دائرية عن طريق دالة تحويل تحول من البيانات على خط الاعداد الحقيقية إلى بيانات اتجاهية مقاسة بالزوايا وغلبا ما تستخدم التوزيعات الدائرية لنموذج البيانات الاتجاهية والتي تنشأ بشكل متكرر في العديد من العلوم الطبيعية والفيزيائية، ففي عام (2004) اقترح الباحثان (Jammalamadaka & Kozubowski) هي الطريقة الأكثر شيوعا في العقد الاخير وتستخدم على نطاق واسع لبناء توزيعات للبيانات الدائرية بالاعتماد على التوزيعات الخطية وتم تطبيقها لأول مرة على التوزيع الاسي وتوزيع لابلاس والتي تتميز بالخصائص التالية :-

- 1-توزيع دائري: البيانات تنتشر حول دائرة.
 - 2-توزيع ملفوف: البيانات تتجمع حول نقطة معينة على الدائرة.
 - 3- توزيع احتمالي: يصف توزيع الاحتمالات حول الدائرة.
- اذا كان لدينا المتغير العشوائي المقاس على خط الاعداد الحقيقية R فعند اسقاط خط من نقطة من نقاط المتغير العشوائي x إلى دائرة الوحدة فان هذا الخط يصنع زاوية في نقطة تقاطع الخط المماس مع محيط دائرة الوحدة .
 وأن دالة الكثافة التراكمية لتوزيع wrapped distributions الذي يرمز له بالرمز (WD) يمكن الحصول عليها باستعمال تقنية التوزيعات الملتفة عن طريق الصيغة الآتية.^[5]

$$G(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} F(\theta + 2\pi m) - F(2\pi m) ; m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad \dots (1)$$

اذ ان

$G(\theta)$ هي التجميعية التراكمية للتوزيع الجديد.

$F(\theta)$: دالة الكتلة او الكثافة التراكمية للتوزيع الاصلي.

يمكن أيجاد الدالة الاحتمالية (p.d.f) لقاعدة (wrapped distributions) من الدالة الاحتمالية للتوزيع الأصلي الخطي عن طريق القاعدة الآتية :

ان قاعدة التحويل للمتغير العشوائي للتوزيعات الملتفة تكو كالتالي:

$$\theta = x(\text{mod}2\pi)$$

$$m = \frac{x - \theta}{2\pi}$$

$$x = \theta + 2\pi m$$

$$g(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} f(\theta + 2\pi m) \quad \dots (2)$$

اذ ان

$g(\theta)$ هي دالة الكتلة او الكثافة الاحتمالية للتوزيع المقترح.

$f(\theta)$: دالة الكتلة او الكثافة الاحتمالية للتوزيع الاساس.

(Two Parameter Mirra Distribution)

7-توزيع ميرا

يعد توزيع ميرا (Mirra Distribution) من التوزيعات الإحصائية المستمرة المختلطة المستعملة بشكل كبير في نمذجة بيانات اوقات الحياة ودالة البقاء اذ ينتسب توزيع ميرا (Mirra Distribution) إلى الباحثين (Sen 2020) واخرون , و هو توزيع احتمالي مختلط مستمر ذو معلمتين هما معلمة الشكل (α) ومعلمة القياس (β) ، وهو توزيع ناتج عن خلط توزيعين اساسيين هما التوزيع الاسي بمعلمة الشكل

$$[g_1(x) \sim \text{Exponential}(\beta)] \text{ وكذلك توزيع كما معلمة (بمعلمة قياس } (\beta) [g_2(t) \sim \text{Gamma}(3, \frac{1}{\beta})] \text{ وبنسب خلط } [v_1 = \frac{\beta^2}{\alpha + \beta^2}]$$

$$[v_2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta^2}]$$

ويعد توزيع ميررا من التوزيعات المتعددة الاستعمالات اذ يدخل في دراسات اوقات المعولية والبقاء ، وكذلك في الدراسات المتمثلة بالتنبأ بتوقعات البقاء وفي جداول الحياة ، وكذلك في البيانات الخاضعة للرقابة بنوعها الاول والثاني وكذلك يدخل هذا التوزيع في التطبيقات الطبية والهندسية والصناعية وكذلك نمذجة الظواهر العشوائية الاخرى [8].

ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ميررا (Mirra Distribution) ستكون على النحو الاتي:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^3}{\alpha + \beta^2} \left(1 + \frac{\alpha}{2}x^2\right) e^{-x\beta} \quad ; x, \alpha, \beta \geq 0 \quad \dots (3)$$

أذن:

α : معلمة الشكل (Shape parameters).
 β : معلمة القياس (Scale parameter).

أن دالة الكثافة التجميعية لتوزيع ميررا يمكن صياغتها بالشكل الاتي:

$$F(x) = 1 - \frac{\beta^2 \left(1 + \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\alpha}{2}x^2\right)}{\alpha + \beta^2} e^{-\beta x} \quad ; x, \alpha, \beta \geq 0 \quad \dots (4)$$

g-دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المقترح (wrapped Mirra distributions):

بالاعتماد على معادلة (2), (3) نحصل على الدالة الاحتمالية الجديدة لتوزيع المقترحة (wrapped Mirra distributions) على النحو الاتي:

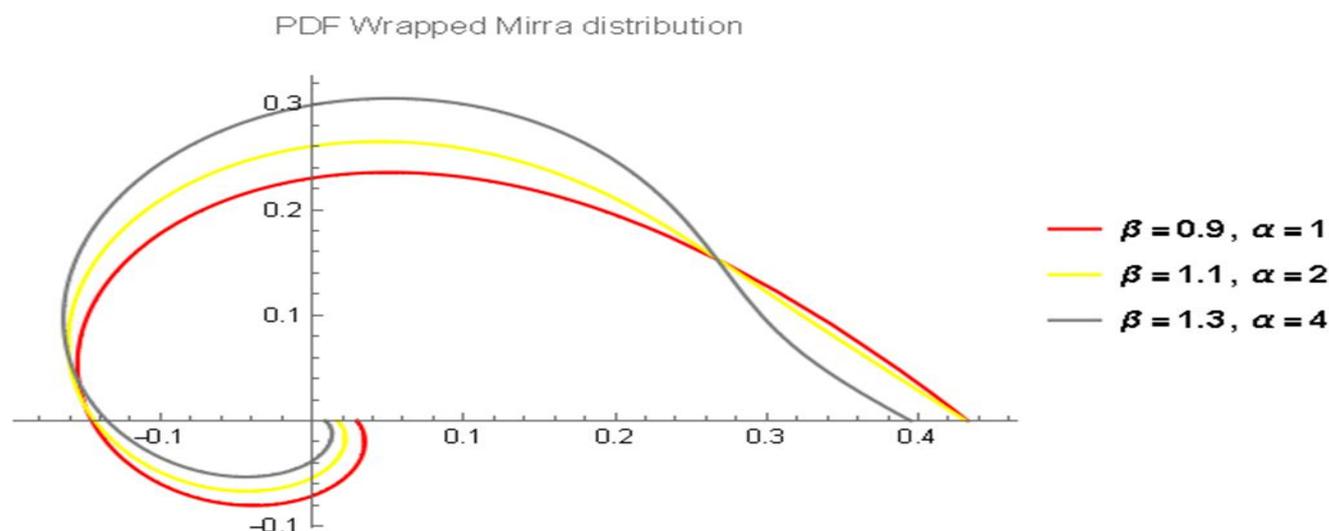
$$f(\alpha, \beta, \theta) = \frac{\beta^3}{\alpha + \beta^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{2}(\theta + 2\pi m)^2\right) e^{-(\theta + 2\pi m)\beta}$$

لذلك فان صيغة دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ميررا الملفت بالشكل التالي:-

$$f(\alpha, \beta, \theta) = \frac{\beta^3}{\alpha + \beta^2} \left[\frac{e^{2\pi\beta - \beta\theta} (2 + 4\pi^2\alpha - 4\pi\alpha\theta + \alpha\theta^2 + e^{2\pi\beta} (-4 + 4\pi^2\alpha + 4\pi\alpha\theta - 2\alpha\theta^2) + e^{4\pi\beta} (2 + \alpha\theta^2))}{2(e^{2\pi\beta} - 1)^3} \right] \quad \dots (5)$$

$\alpha, \theta, \beta, \geq 0$

والشكل (1) ادناه يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع wrapped Mirra distributions باستعمال قيم افتراضية مختلفة للمعلمات: [6] [8]



الشكل (1) ادناه يوضح دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (wrapped Mirra distributions) (من اعداد الباحث)

وبا لاعتدال على معادلة (1), (4) نحصل على الدالة الاحتمالية التراكمية للتوزيع المقترحة لتوزيع (wrapped Mirra distributions) على النحو الاتي:

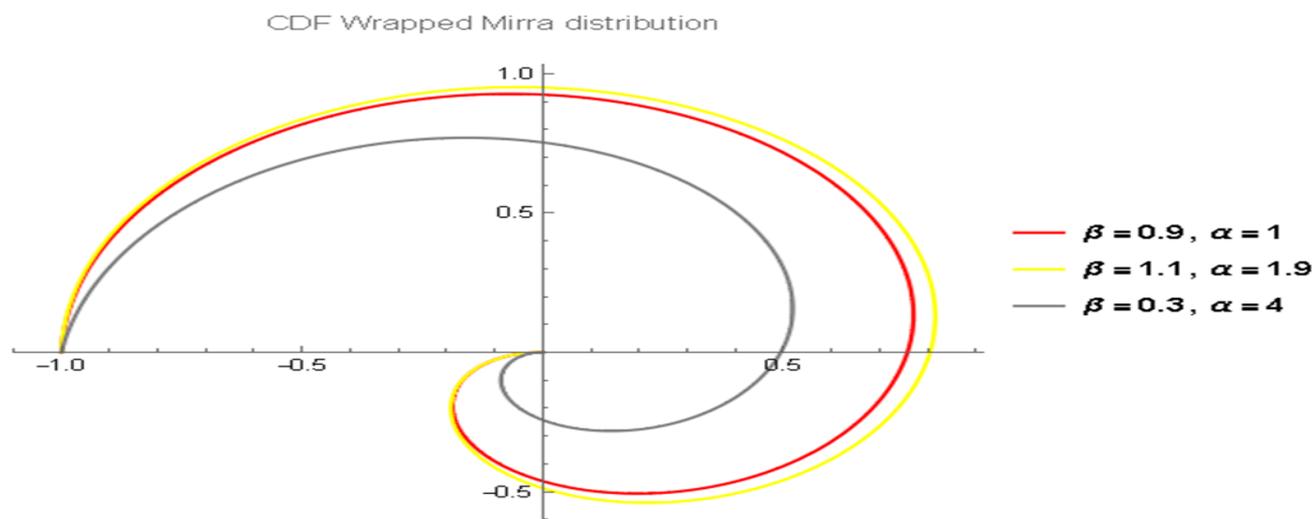
$$G(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} F(\theta + 2\pi m) - F(2\pi m)$$

$F(\alpha, \beta, \theta)$

$$= \frac{e^{2\pi\beta - \beta\theta}}{2(e^{2\pi\beta} - 1)^3(\alpha + \beta^2)} \left(\begin{array}{l} (2(-1 + e^{2\pi\beta})^2(-1 + e^{\beta\theta})\beta^2 - \alpha(2 - 2e^{\beta(4\pi+\theta)} \\ -2e^{\beta(4\pi+\theta)} + 4\pi^2\beta^2 + e^{\beta\theta}(-2 + 4\pi\beta - 4\pi^2\beta^2) \\ -4e^{\beta(2\pi+\theta)}(-1 + \pi\beta + \pi^2\beta^2) + 2\beta\theta + \beta^2\theta^2 - 4\pi\beta(1 + \beta\theta) \\ + e^{4\pi\beta}(2 + 2\beta\theta + \beta^2\theta^2) + e^{2\pi\beta}(4\pi^2\beta^2 + 4\pi\beta(1 + \beta\theta) - 2(2 + 2\beta\theta + \beta^2\theta^2))) \end{array} \right)$$

... (6)

والشكل (2) ادناه يوضح الدالة التراكمية لتوزيع (wrapped Mirra distributions) باستعمال قيم افتراضية مختلفة للمعلمات:



الشكل (2) يوضح دالة التجميعية لتوزيع (wrapped Mirra distributions) (من اعداد الباحث)

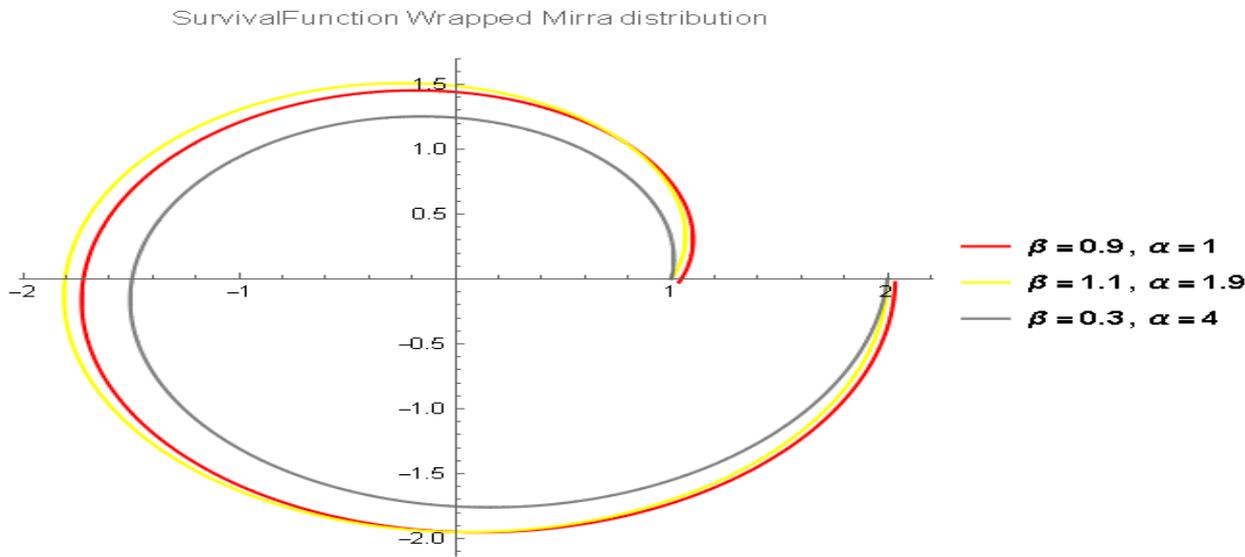
ويمكن الحصول على دالة البقاء لتوزيع ميررا (wrapped Mirra distributions) من خلال الصيغة التالية :

$$S(\alpha, \beta, \theta) = 1 - F(\alpha, \beta, \theta)$$

= 1

$$\frac{e^{2\pi\beta - \beta\theta}}{2(e^{2\pi\beta} - 1)^3(\alpha + \beta^2)} \left(\begin{aligned} & (2(-1 + e^{2\pi\beta})^2(-1 + e^{\beta\theta})\beta^2 - \alpha(2 - 2e^{\beta(4\pi+\theta)} \\ & - 2e^{\beta(4\pi+\theta)} + 4\pi^2\beta^2 + e^{\beta\theta}(-2 + 4\pi\beta - 4\pi^2\beta^2) \\ & - 4e^{\beta(2\pi+\theta)}(-1 + \pi\beta + \pi^2\beta^2) + 2\beta\theta + \beta^2\theta^2 - 4\pi\beta(1 + \beta\theta) \\ & + e^{4\pi\beta}(2 + 2\beta\theta + \beta^2\theta^2) + e^{2\pi\beta}(4\pi^2\beta^2 + 4\pi\beta(1 + \beta\theta) - 2(2 + 2\beta\theta + \beta^2\theta^2))) \end{aligned} \right) \dots (7)$$

وان الشكل (3) ادناه يوضح دالة البقاء لتوزيع wrapped Mirra distributions:



الشكل (3) يوضح دالة البقاء لتوزيع (wrapped Mirra distributions) (من اعداد الباحث)

9-الدالة الكمية لتوزيع (wrapped Mirra distributions):

يتم تعريف الدالة الكمية (العكسية) لتوزيع (Wrapped Mirra Distribution) على وفق الخطوات التالية:
 1- توليد الاعداد العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم المستمر (Uniform Distribution) الذي تقع ضمن الفترة [0, 1].
 2- استعمال طريقة التحويل المعكوس (Inierse Function) عن طريق استعمال دالة الكثافة التجميعية لتوزيع (Wrapped Mirra Distribution) معلمات بمساواة دالة التوزيع التراكمية للتوزيع بالرقم العشوائي الذي تم توليدها في الخطوة (1) وكالاتي: [7] [21]

$$\theta = Q(u) = F^{-1}(u), 0 < u < 1$$

وبالاعتماد على البرامج الاحصائية تم الحصول على دالة التوليد وحسب الصيغة التالية :

$$\theta = \left(\begin{aligned} & \frac{1}{4(-1 + e^{2\pi\beta})\pi\alpha\beta} (2\beta - 4e^{2\pi\beta}\beta + 2e^{4\pi\beta}\beta + \alpha\beta - 2e^{2\pi\beta}\alpha\beta + e^{4\pi\beta}\alpha\beta + 4\pi^2\alpha\beta + 4e^{2\pi\beta}\pi^2\alpha\beta \\ & - 4\pi\alpha \text{ProductLog} \left[-\frac{1}{2(-1 + e^{2\pi\beta})\pi\alpha\beta^2} - 2\pi\beta - \frac{2e^{2\pi\beta}\beta^4}{-4e^{2\pi\beta}\pi\alpha\beta^3 + 4e^{4\pi\beta}\pi\alpha\beta^3} + \frac{4e^{4\pi\beta}\beta^4}{-4e^{2\pi\beta}\pi\alpha\beta^3 + 4e^{4\pi\beta}\pi\alpha\beta^3} \right. \\ & \left. - \frac{2e^{6\pi\beta}\beta^4}{-4e^{2\pi\beta}\pi\alpha\beta^3 + 4e^{4\pi\beta}\pi\alpha\beta^3} - \frac{e^{2\pi\beta}\alpha\beta^4}{-4e^{2\pi\beta}\pi\alpha\beta^3 + 4e^{4\pi\beta}\pi\alpha\beta^3} + \frac{2e^{4\pi\beta}\alpha\beta^4}{-4e^{2\pi\beta}\pi\alpha\beta^3 + 4e^{4\pi\beta}\pi\alpha\beta^3} \right] \end{aligned} \right) \quad \dots (8)$$

10-الخصائص المميزة لتوزيع (Distribution wrapped Mirra distributions):

في هذا القسم نشق الدالة المميزة والعزوم المثلثية والمعلمات الاخرى مثل معاملات الانحراف ولتفرطح

(1-10) الدالة المميزة (Characteristic function):

يقال للدالة $\phi(\rho) = E(e^{itx})$ بأنها الدالة المميزة (Characteristic function) للمتغير العشوائي X ، ولكل قيم t الحقيقية وتعد الدالة المميزة من أهم الدوال المولدة على الإطلاق، لأن بعض التوزيعات الاحتمالية كتوزيع كوشي مثلاً لا تمتلك عزوم وبالتالي فإنها لا تمتلك دوال مولدة للعزوم، إلا إنها تمتلك دالة مميزة فكل توزيع احتمالي يقترن في الحقيقة بدالة مميزة وحيدة والعكس صحيح فكل دالة مميزة تقترن بتوزيع احتمالي وحيد.

و يمكن الحصول على الدالة المميزة لتوزيع (wrapped Mirra distributions) بالاعتماد على دالة الكثافة في المعادلة (2-2) وتكون بالشكل التالي: [9]

$$\begin{aligned} \phi(\rho) &= \phi_x(t) \\ \phi_x(t) &= E(e^{itx}) \end{aligned} \quad \dots (9)$$

يتم اعطاء الدالة المميزة لتوزيع Mirra distributions بواسطة.

$$\begin{aligned} E(e^{xti}) &= \frac{\beta^3}{\alpha + \beta^2} \int_0^\infty e^{xti} \left(1 + \frac{\alpha}{2}x^2\right) e^{-x\beta} \\ E(e^{xti}) &= \phi_{x(t)} = \frac{\beta^3(\alpha + (ti + \beta)^2)}{(\alpha + \beta^2)(ti + \beta)^3} \\ \phi_{(p)} &= \frac{\beta^3(\alpha + (ip + \beta)^2)}{(\alpha + \beta^2)(ip + \beta)^3} \\ \phi_{(p)} &= \frac{\beta^3}{(\alpha + \beta^2)} [\alpha + (ip + \beta)^2(ip + \beta)^{-3}] \\ \phi_{(p)} &= \frac{\beta^3(\beta^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{((\alpha + \beta^2)^2 + (ip + 2\beta)^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha + \beta^2)} \left[e^{-i(\arctan(\frac{\alpha + \beta^2}{p + 2\beta}) + 3\arctan(\frac{p}{\beta}))} \right] \\ \phi_{(p)} &= P_p e^{-i\mu p} \end{aligned}$$

$$P_p = \frac{\beta^3(\beta^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{((\alpha + \beta^2)^2 + (ip + 2\beta)^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha + \beta^2)} \quad \dots (10)$$

2-10 العزوم المثلثية:

أظهر أن العزوم المثلثية للتوزيع الدائري الملتف يساوي قيمه الدالة المميزة للمتغير العشوائي غير الملتف عند قيمه العدد الصحيح P. $\phi_{(p)} = \alpha_p + i\beta_p$; $p = \pm 1, \pm 2, \dots$... (11)

وبالتالي فإن العزوم المثلثية غير المركزية للتوزيع هي [10]

$$\mu_p = \left(\arctan \left(\frac{\alpha + \beta^2}{p + 2\beta} \right) + 3 \arctan \left(\frac{p}{\beta} \right) \right)$$

$$\phi_p = \alpha_p + i\beta_p$$

$$\alpha_p = P_p \cos(\mu_p)$$

$$\beta_p = P_p \sin(\mu_p)$$

$$\alpha_p = \frac{\beta^3(\beta^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{((\alpha + \beta^2)^2 + (ip + 2\beta)^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha + \beta^2)} \cos \left(\arctan \left(\frac{\alpha + \beta^2}{p + 2\beta} \right) + 3 \arctan \left(\frac{p}{\beta} \right) \right)$$

$$\beta_p = \frac{\beta^3(\beta^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{((\alpha + \beta^2)^2 + (ip + 2\beta)^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha + \beta^2)} \sin \left(\arctan \left(\frac{\alpha + \beta^2}{p + 2\beta} \right) + 3 \arctan \left(\frac{p}{\beta} \right) \right)$$

$$\overline{\alpha}_p = \frac{\beta^3(\beta^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{((\alpha + \beta^2)^2 + (ip + 2\beta)^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha + \beta^2)} \cos \left(\operatorname{rctan} \left(\frac{\alpha + \beta^2}{p + 2\beta} \right) + 3 \arctan \left(\frac{p}{\beta} \right) - p \left(\operatorname{rctan} \left(\frac{\alpha + \beta^2}{p + 2\beta} \right) + 3 \arctan \left(\frac{p}{\beta} \right) \right) \right)$$

$$\overline{\beta}_p = \frac{\beta^3(\beta^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{((\alpha + \beta^2)^2 + (ip + 2\beta)^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha + \beta^2)} \sin \left(\operatorname{rctan} \left(\frac{\alpha + \beta^2}{p + 2\beta} \right) + 3 \arctan \left(\frac{p}{\beta} \right) - p \left(\operatorname{rctan} \left(\frac{\alpha + \beta^2}{p + 2\beta} \right) + 3 \arctan \left(\frac{p}{\beta} \right) \right) \right)$$

3-10 الوسط الحسابي لتوزيع (wrapped Mirra distributions)

يمكن حساب الوسط الحسابي لتوزيع (wrapped Mirra distributions) المقترح من خلال الصيغة الآتية [2].

$$\mu = \mu_1$$

$$\mu = \left(\arctan \left(\frac{\alpha + \beta^2}{p + 2\beta} \right) + 3 \arctan \left(\frac{p}{\beta} \right) \right) \quad \dots (12)$$

4-10 التباين الدائري لتوزيع (wrapped Mirra distributions)

يمكن حساب التباين الدائري لتوزيع wrapped Mirra distributions من خلال المعادلة الصيغة الآتية [12].

$$V_0 = 1 - P_1$$

$$V_0 = 1 - \frac{\beta^3(\beta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{((\alpha + \beta^2)^2 + (1 + 2\beta)^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha + \beta^2)} \quad \dots (13)$$

5-10 الانحراف المعياري الدائري لتوزيع (wrapped Mirra distributions)

ولحساب الانحراف المعياري الدائري للتوزيع المقترح نستعمل الصيغة الآتية: [5]

$$\sigma_0 = \sqrt{-2\text{Log}(V_0)}$$

$$\sigma_0 = \sqrt{-2\text{Log}\left(1 - \frac{\beta^3(\beta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{((\alpha + \beta^2)^2 + (1 + 2\beta)^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha + \beta^2)}\right)} \quad \dots (14)$$

6-10 معامل الالتواء Coefficient of Skewness

ويمكن حساب معامل الالتواء الدائري للتوزيع المقترح نستعمل الصيغة الآتية:

$$\text{coefficient of skewness} = \frac{\overline{\beta_2}}{(V_0)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\beta^3(\beta^2+4)^{\frac{3}{2}} \sin\left(\text{rctan}\left(\frac{\alpha+\beta^2}{2+2\beta}\right)+3 \arctan\left(\frac{2}{\beta}\right)-2\left(\text{rctan}\left(\frac{\alpha+\beta^2}{2+2\beta}\right)+3 \arctan\left(\frac{2}{\beta}\right)\right)\right)}{\left(\frac{\beta^3(\beta^2+1)^{\frac{3}{2}}}{((\alpha+\beta^2)^2+(2+2\beta)^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha+\beta^2)}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

7-10 معامل التفطح (Coefficient of Kurtosis)

ولحساب معامل التفطح للتوزيع المقترح نستعمل الصيغة الآتية: [9]

$$\text{The coefficient of kurtosis} = \frac{\overline{\alpha_2} - (1 - I_0)^4}{(I_0)^2}$$

$$= \frac{\beta^3(\beta^2+4)^{\frac{3}{2}} \sin\left(\text{rctan}\left(\frac{\alpha+\beta^2}{2+2\beta}\right)+3 \arctan\left(\frac{2}{\beta}\right)-2\left(\text{rctan}\left(\frac{\alpha+\beta^2}{2+2\beta}\right)+3 \arctan\left(\frac{2}{\beta}\right)\right)\right) - (1-V_0)^4}{\left(\frac{\beta^3(\beta^2+1)^{\frac{3}{2}}}{((\alpha+\beta^2)^2+(2+2\beta)^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha+\beta^2)}\right)^2} \quad \dots (15)$$

11-تقديرات معلمات ودالة البقاء لتوزيع (wrapped Mirra distributions)

ان عملية تقدير معلمات اي مجتمع هي تقريب للخصائص الاصلية للمجتمع الذي سحبت منه العينة، ويعد التقدير من الركائز الاساسية في الاستدلال الاحصائي إذ تكمن أهميته في تقدير معلمات المجتمع الذي يتم عن طريق احصاءات يتم الحصول عليها من عينة تسحب من المجتمع قيد الدراسة.

وأن لتوزيع (wrapped Mirra distributions) ذو معلمتان معلمات (α, β) ولهما تقدير يتم تقدير المعلمات باستعمال طرائق التقدير ومن ثم تقدير دالة البقاء بالاعتماد عليهما، ومن طرائق التقدير التي وقع عليها اختيار الباحث هي:

(1) طريقة الإمكان الأعظم [8] [11]

(2) طريقة كريمر فون مايسز .

11-1 طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method)

تُعد طريقة الامكان الاعظم من أهم الطرائق المستعملة في عملية التقدير التي اقترحت من قبل العالم ا (Fisher) عام (1920) والتي تهدف إلى جعل دالة الامكان للمتغيرات العشوائية (random iariables) أعظم ما يمكن والاكثر شيوعاً واستعمالاً، كونها تتميز بعدة خصائص منها:-

1- الكفاية (Sufficient) .

2- أقل تباين (Minimum Iariance) .

- 3- الثبات (Invariance) .
- 4- عدم التحيز (Unbiased) بازياد حجم العينة.
- 5- الاتساق (consistency) .
- 6- الكفاءة (Efficiency) .

اذا كان للمتغير العشوائي (X) دالة كثافة احتمالية لتوزيع ميرى الملفت فان دالة الامكان الاعظم للمتغيرات العشوائية المستقلة $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ تكون كالتالي:

$$Lf(\beta, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(\beta, \alpha)$$

$$= \frac{(\beta^3)^n}{(2(e^{2\pi\beta} - 1)^3(\alpha + \beta^2))^n} \prod_{i=1}^n \left(e^{2\pi\beta - \beta\theta} (2 + 4\pi^2\alpha - 4\pi\alpha\theta + \alpha\theta^2) + e^{2\pi\beta}(-4 + 4\pi^2\alpha + 4\pi\alpha\theta - 2\alpha\theta^2) + e^{4\pi\beta}(2 + \alpha\theta^2) \right)$$

وبأخذ اللوغاريتم للطرفين ينتج:

$$\text{Log}l f(\beta, \alpha) = \left(\begin{aligned} & n\text{Log}[\beta^3] - n(\text{Log}[2] + 3\text{Log}[e^{2\pi\beta} - 1] + \text{Log}(\alpha + \beta^2)) \\ & + \sum_{i=1}^n \text{Log}[e^{2\pi\beta - \beta\theta} (2 + 4\pi^2\alpha - 4\pi\alpha\theta + \alpha\theta^2) + e^{2\pi\beta}(-4 + 4\pi^2\alpha + 4\pi\alpha\theta - 2\alpha\theta^2) + e^{4\pi\beta}(2 + \alpha\theta^2)] \end{aligned} \right)$$

وباشتقاق الدالة أنفأ لجميع معلمات التوزيع (β, α) على الترتيب ومساواتها للصفر:

$$\frac{\partial \text{Log}l}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha + \beta^2} + e^{2\pi\beta - \beta\theta} \sum_{i=1}^n (e^{4\pi\beta}\theta^2 + (-2\pi + \theta)^2 + e^{2\pi\beta}(4\pi^2 + 4\pi\theta - 2\theta^2)) \quad \dots (16)$$

$$\frac{\partial \text{Log}l}{\partial \beta} = \left(\begin{aligned} & \frac{6e^{2\pi\beta}n\pi}{-1 + e^{2\pi\beta}} + \frac{3n}{\beta} - \frac{2n\beta}{\alpha + \beta^2} + e^{2\pi\beta - \beta\theta} \sum_{i=1}^n (2\pi - \theta)(2 + \alpha(-2\pi + \theta)^2) \\ & + e^{2\pi\beta}(-4 + 4\pi^2\alpha + 4\pi\alpha\theta - 2\alpha\theta^2) + e^{4\pi\beta}(2 + \alpha\theta^2) \\ & + e^{2\pi\beta - \beta\theta}n(2e^{2\pi\beta}\pi(-4 + 4\pi^2\alpha + 4\pi\alpha\theta - 2\alpha\theta^2) + 4e^{4\pi\beta}\pi(2 + \alpha\theta^2)) \end{aligned} \right) \quad \dots (17)$$

المعادلات السابقة لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لانها معادلات غير خطية ولذلك تم حلها باستعمال الطريقة العددي للحصول على مقدرات طريقة الإمكان الأعظم، وتعويض المقدرات $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ في دالة الكثافة الاحتمالية نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لهذه الدالة.

$$S(\alpha, \beta) = 1 - \left(\begin{aligned} & \frac{e^{2\pi\hat{\beta}_{MLE} - \hat{\beta}_{MLE}\theta}}{2(e^{2\pi\hat{\beta}_{MLE}} - 1)^3(\hat{\alpha}_{MLE} + \hat{\beta}_{MLE}^2)} ((2(-1 + e^{2\pi\hat{\beta}_{MLE}})^2(-1 + e^{\hat{\beta}_{MLE}\theta})\beta^2 - \alpha(2 - 2e^{\hat{\beta}_{MLE}(4\pi+\theta)} \\ & - 2e^{\hat{\beta}_{MLE}(4\pi+\theta)} + 4\pi^2\hat{\beta}_{MLE} + e^{\hat{\beta}_{MLE}\theta}(-2 + 4\pi\hat{\beta}_{MLE} - 4\pi^2\hat{\beta}_{MLE}^2) \\ & - 4e^{\beta(2\pi+\theta)}(-1 + \pi\beta + \pi^2\beta^2) + 2\beta\theta + \beta^2\theta^2 - 4\pi\beta(1 + \hat{\beta}_{MLE}\theta) \\ & + e^{4\pi\hat{\beta}_{MLE}}(2 + 2\hat{\beta}_{MLE}\theta + \hat{\beta}_{MLE}^2\theta^2) + e^{2\pi\beta}(4\pi^2\hat{\beta}_{MLE} + 4\pi\beta(1 + \hat{\beta}_{MLE}\theta) - 2(2 + 2\beta\theta + \hat{\beta}_{MLE}^2\theta^2))) \end{aligned} \right)$$

... (18)

2-11 طريقة كرامر فون مايسز (Method of Cramer-Ion Mises Minimum)

قدم (Donald) (1971) دليلاً تجريبياً على أن المقدر المتحيز أصغر من الحد الأدنى للمقدرات الأخرى وذلك من خلال استعمال طريقة (CvME) وبالاعتماد على المقدرات الموجودة في الدالة التجميعية وتعتمد طريقة كريمر فون مايسز على مقدرات الحد الأدنى للمسافة إذ يمكننا الحصول على تقديرات المسافة الدنيا لطريقة Cramer-von Mises Minimum وذلك بتقليل المسافة بين الدالة $c(\beta, \alpha)$ بالنسبة للمعلومات غير المعروفة ويمكننا الحصول على المقدرات وذلك بالاشتقاق الجزئي $c(\beta, \alpha)$ بالنسبة للمعلومات غير المعروفة ومساواتها للصفر وكالتالي: [6] [21]

$$c(\beta, \alpha) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[F(\beta, \alpha) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \quad \dots (19)$$

اذ ان $F(\beta, \alpha)$ تمثل الدالة التجميعية لتوزيع ميرى الملف وكالتالي:

$$C = \left(\sum_{i=1}^n \frac{e^{2\pi\beta - \beta\theta}}{2(e^{2\pi\beta} - 1)^3(\alpha + \beta^2)} \left(\begin{aligned} & (2(-1 + e^{2\pi\beta})^2(-1 + e^{\beta\theta})\beta^2 - \alpha(2 - 2e^{\beta(4\pi+\theta)} \\ & - 2e^{\beta(4\pi+\theta)} + 4\pi^2\beta^2 + e^{\beta\theta}(-2 + 4\pi\beta - 4\pi^2\beta^2) \\ & - 4e^{\beta(2\pi+\theta)}(-1 + \pi\beta + \pi^2\beta^2) + 2\beta\theta + \beta^2\theta^2 - 4\pi\beta(1 + \beta\theta) \\ & + e^{4\pi\beta}(2 + 2\beta\theta + \beta^2\theta^2) + e^{2\pi\beta}(4\pi^2\beta^2 + 4\pi\beta(1 + \beta\theta) - 2(2 + 2\beta\theta + \beta^2\theta^2))) \end{aligned} \right) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 \quad \dots (20)$$

ولتصغير المسافة الدنيا يتم اشتقاق جزئي بالنسبة للصيغة السابقة ومساواتها للصفر وحسب ما يأتي:
الاشتقاق بالنسبة α للحصول على المقدر $\hat{\alpha}_{Cvm}$ وكالتالي:

$$\frac{dc}{d\alpha} = 2 \sum_{i=1}^n v \left(\begin{aligned} & \frac{1}{2(-1+e^{2\pi\beta})^3(\alpha+\beta^2)} e^{2\pi\beta-\beta\theta} (-2+2e^{\beta(4\pi+\theta)} - 4\pi^2\beta^2 - e^{\beta\theta}(-2+4\pi\beta-4\pi^2\beta^2) \\ & + 4e^{\beta(2\pi+\theta)}(-1+\pi\beta+\pi^2\beta^2) - 2\beta\theta - \beta^2\theta^2 + 4\pi\beta(1+\beta\theta) - e^{4\pi\beta}(2+2\beta\theta+\beta^2\theta^2) \\ & - e^{2\pi\beta}(4\pi^2\beta^2 + 4\pi\beta(1+\beta\theta) - 2(2+2\beta\theta+\beta^2\theta^2))) - \frac{1}{2(-1+e^{2\pi\beta})^3(\alpha+\beta^2)^2} e^{2\pi\beta-\beta\theta} e^{\beta\theta} \beta^2 \\ & \alpha(2-2e^{\beta(4\pi+\theta)} + 4\pi^2\beta^2 + e^{\beta\theta}(-2+4\pi\beta-4\pi^2\beta^2) - 4e^{\beta(2\pi+\theta)}(-1+\pi\beta+\pi^2\beta^2) + 2\beta\theta + \beta^2\theta^2 \\ & - 4\pi\beta(1+\beta\theta) + e^{4\pi\beta}(2+2\beta\theta+\beta^2\theta^2) + e^{2\pi\beta}(4\pi^2\beta^2 + 4\pi\beta(1+\beta\theta) - 2(2+2\beta\theta+\beta^2\theta^2))) \end{aligned} \right) = 0 \quad \dots (21)$$

الاشتقاق بالنسبة β للحصول على المقدر $\hat{\beta}_{Cvm}$ وكالتالي:

$\frac{dc}{d\beta}$

$$= \left[2 \sum_{i=1}^n v \left[\frac{1}{2(-1 + e^{2\pi\beta})^7 n(\alpha + \beta^2)^3} e^{2\beta(\pi-\theta)} \beta^2 (-8(1 + 4e^{2\pi\beta} + e^{4\pi\beta})(-1 + e^{\beta\theta})\pi^3 \alpha(\alpha + \beta^2) \right. \right. \\ \left. \left. + 4(-1 + e^{4\pi\beta})\pi^2 \alpha(3\alpha\theta + \beta(2 - 2e^{\beta\theta} + 3\beta\theta)) + (-1 + e^{2\pi\beta})^3 \theta(2\beta^2 + \alpha(6 + 2\beta\theta + (\alpha + \beta^2)\theta^2)) + \right. \right. \\ \left. \left. 2(-1 + e^{2\pi\beta})^2 \pi(2\beta^2 - 2e^{\beta\theta}(3\alpha + \beta^2) + \alpha(6 + 4\beta\theta + 3(\alpha + \beta^2)\theta^2)) \right. \right. \\ \left. \left. - 2e^{\beta\theta} i(\alpha + \beta^2) + 2e^{\beta(6\pi+\theta)}(i + n)(\alpha + \beta^2) + 2e^{\beta(2\pi+\theta)}(3i(\alpha + \beta^2) + n(\alpha + \beta^2 + 2\pi\alpha\beta(-1 + \pi\beta))) - \right. \right. \\ \left. \left. 2e^{\beta(4\pi+\theta)}(3i(\alpha + \beta^2) + 2n(\alpha + \beta^2 - \pi\alpha\beta(1 + \pi\beta))) - e^{2\pi\beta} n(2\beta^2 + \alpha(2 + \beta(2\pi - \theta))(-2 + 2\pi\beta - \beta\theta)) \right. \right. \\ \left. \left. - e^{6\pi\beta} n(2\beta^2 + \alpha(2 + \beta\theta(2 + \beta\theta))) - 2e^{4\pi\beta} n(-2\beta^2 + \alpha(-2 + \beta(2\pi^2\beta + 2\pi(1 + \beta\theta) - \theta(2 + \beta\theta)))) \right] \right] \quad \dots (22)$$

المعادلات تمثل نظام معادلات لخطية لا يمكن حلها بالطرائق الاعتيادية الا باستعمال الطرائق العددية من اجل الحصول على مقدرات الامكان الاعظم ($\hat{\alpha}_{cvm}, \hat{\beta}_{cvm}$) للمعلمات المجهولة α, β و بتعويض المقدرات في دالة البقاء للتوزيع المقترح.

8-2 اختبارات حسن المطابقة (Goodness of fit tests)

تم اختبار البيانات بواسطة برنامج Mathematica لبيان ملائمتها للتوزيع موضوع البحث وكذلك حالاته الخاصة، وقد تم اجراء اختبار حسن المطابقة (Goodness of fit) والذي يتضمن اختبارين وهي كالاتي: [6]

1- Watson's Test

يعد اختبار (Watson's Test) هو اختبار إحصائي يستخدم لتحديد مدى ملائمة التوزيعات الدائرية مع البيانات الحقيقية يُستخدم هذا الاختبار بشكل خاص في حالة البيانات الدائرية أو البيانات التي تقع على كرة و أن الصيغة العامة للاختبار تكون كما يلي:

$$U^2 = \sum_{i=0}^n \left(F_i - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 + \frac{1}{12n} - n \left(\bar{F} - \frac{1}{2} \right)^2 \quad \dots (23)$$

أذ ان:

F_i : القيم الموحدة المرتبة تصاعديا .

2- Kuiper Test

وهو اختبار احصائي يستخدم مدى توافق البيانات الدائرية مع التوزيع المنتظم الدائري وهو اختبار شبيهة باختبار كولمكروف سميير نوف كرة و أن الصيغة العامة للاختبار تكون كما يلي:

$$V_{\text{Kuiper Test}}^* = D^- + D^+ \quad \dots (24)$$

حيث ان :

$$D^+ = \max\left(\frac{i}{n} - F_i\right)$$

$$D^- = \max\left(F_i - \frac{i-1}{n}\right)$$

3 - Rayleigh test

وهو اختبار احصائي يستخدم مدى توافق البيانات الدائرية مع التوزيع المنتظم الدائري و أن الصيغة العامة للاختبار تكون كما يلي:

$$\bar{R} = \sqrt{\bar{C}^2 + \bar{S}^2} \quad \dots (25)$$

أذ ان :

$$\bar{c}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i)$$

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin(\theta_i)$$

وبحسب الفرضية الاتية ولجميع الاختبارات المذكورة آنفاً:

H_0 : The data haie wrapped Mirra distributions.

H_1 : The data dont haie wrapped Mirra distributions

12 معايير اختيار أفضل توزيع (Criteria for selection of the best)

تعد من العمليات الاحصائية المهمة جدا في التحليل الاحصائي للمشاهدات اذ يتم اختيار أفضل توزيع احتمالي من مجموعة من التوزيعات، ولغرض مقارنة التوزيعات توزيع (Mirra distributions) مع التوزيع المقترح (wrapped Mirra distributions) تم استعمال ثلاثة معايير للمفاضلة وهي:

1-12 اختبار أكايكي (AIC) (Akaike Test):

أن الصيغة العامة لأحصاء معيار أكايكي (AIC) كما يلي^[3]

$$AIC = -2L(\hat{\theta} \setminus X) + 2P \quad \dots (26)$$

P : تمثل عدد المعلمات في دالة التوزيع الاحتمالية النظرية.

$L(\hat{\theta} \setminus X)$: تمثل لوغاريتم دالة الترجيح ((Log Likelihood Function) لمشاهدات بيانات العينة.

2-12 اختبار بيز أكايكي: (BIC) (Bayesian Akaike Test):

أحدى معايير اختبار الذي يستخدم للمفاضلة بين التوزيعات الاحتمالية ويرمز له اختصار (BIC) وأن صيغته العامة تكون كما يلي:

$$BIC = -2L(\hat{\theta} \setminus x) + P \log(n) \quad \dots (27)$$

$L(\hat{\theta} \setminus X)$: تمثل لوغاريتم دالة الترجيح ((Log Likelihood Function) لمشاهدات بيانات العينة.

P : تمثل عدد المعلمات في دالة التوزيع الاحتمالية النظرية.

n : تمثل حجم العينة.

و ان n تمثل حجم العينة

13- معايير اختيار أفضل الطرائق

1-13 معايير مقارنة طرائق التقدير:

(Criteria for comparing estimation methods)

1- متوسط مربعات الخطأ (MSE) بالنسبة إلى معلمات wrapped Mirra distributions

$$MSE(\theta) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{\beta}_i - \beta)^2 \quad \dots (28)$$

β : تمثل القيم الافتراضية لمعالم الانموذج أي ان $\theta = (\sigma, \alpha, \beta)$.

$\hat{\beta}_i$: تمثل القيم المقدرة لمعالم الانموذج وحسب طريقة التقدير المستعملة.

R : يمثل عدد تكرار التجربة .

2- متوسط مربعات الخطأ (MSE) بالنسبة إلى دالة البقاء لتوزيع (wrapped Mirra distributions)

$$MSE(\hat{S}(\theta_j)) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (\hat{S}_i(\theta_j) - S_i(\theta_j))^2 \quad , j = 1, 2, \dots, k \quad \dots (29)$$

$S_i(\theta_j)$: تمثل قيم دالة البقاء الحقيقية.

$\hat{S}_i(\theta_j)$: تمثل قيم دالة البقاء المقدرة حسب طريقة التقدير المستعملة.

R : يمثل عدد تكرار التجربة.

K: يمثل عدد مشاهدات التجربة.

14- الجانب التجريبي:

تم استخدام المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبيا، حيث تم توليد البيانات التي تتبع التوزيع المقترح نظريا من دون الحصول عليها من الواقع العملي اذ يتميز هذا الأسلوب بالدقة ويوفر للباحثين الكثير من الوقت والجهد والمال لذلك يعتبر أسلوب مرن ويمكن تلخيص هذه الطريقة بالخطوات الآتية:

أولاً- تحديد القيم الافتراضية: تم اختيار خمس حجوم للعينات وهي (25,50,75,100) واستخدمت قيم افتراضية للمعاملات فكانت كما في الجدول الآتي:

جدول رقم (1) القيم الافتراضية لمعاملات التوزيع (wrapped Mirra distributions)

Experiment	β	α
1	2	0.01
2	1.5	0.5

ثانيا- تكرار التجربة 1000 مرة.

ثالثا - توليد المتغير العشوائي الذي يتوزع وفق النموذج (wrapped Mirra distributions).

رابعاً- المقارنة بين طرائق التقدير المستخدمة واختيار الطريقة الأفضل باستعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) والذي كلما تقل قيمته كلما كان المقدار افضل وتكتب صيغته كالآتي [3]:

$$MSE(\hat{S}(t_i)) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{n_t} (\hat{S}_j(t_i) - S_j(t_i))^2 \quad \dots (30)$$

إذ أن:

L: تمثل عدد مرات تكرار التجربة وهو (1000) مرة.

n_t : هي معبرة عن حدود المتغير (t_j) من الحد الأدنى الى الحد الأعلى .

$\hat{S}(t_j)$: القيمة المقدرة لدالة البقاء وفق طرائق التقدير المستعملة .

t_i : تمثل أوقات البقاء لحين الفشل والتي تعتبر عينة تمثل التوزيع الاحتمالي (wrapped Mirra distributionn) .

$S(t)$: دالة البقاء الحقيقية (الافتراضية) وهي في حالة تناقص.

$\hat{S}(t)_{ML}$: دالة البقاء المقدرة بطريقة الإمكان الأعظم لـ (1000) تجربة.

$\hat{S}(t)_{cvm}$: دالة البقاء المقدرة بطريقة العزوم لـ (1000) تجربة وهي في حالة تناقص،

وفي ما يلي نتائج تجارب المحاكات:

جدول (2) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بموجب طرائق التقدير وقيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي لكل طريقة عند احجام العينات المقترضة للأنموذج الأول والثاني

جدول رقم (2) متوسط مربعات الخطأ لطرائق التقدير كافة وأحجام العينات للأنموذج الأول

Sample size	Performance			Best
		Methods		
		MLE	CVME	
25	MSE	0.002964194	0.001817913	CVME
50	MSE	0.0003225222	0.00031573	CVME
75	MSE	0.000117599	0.000106558	CVME
100	MSE	0.000101991	2.765E-04	CVME

جدول رقم (3) متوسط مربعات الخطأ لطرائق التقدير كافة وأحجام العينات للأنموذج الثاني

Sample size	Performance			Best
		Methods		
		MLE	CVME	
50	MSE	0.000172024	0.00772288	MLE
75	MSE	0.000347032	0.000493754	MLE
100	MSE	4.90014E-05	3.41016E-05	CVME
150	MSE	2.02103E-06	1.74129E-06	CVME

من الجداول (2)(3)

❖ افضلية طريقة الامكان الاعظم (CVME) في تقدير معلمات التوزيع المقترح وذلك لكونها اخذت الرتبة الأولى عند جميع احجام العينات كافة في حين اخذت المرتبة الاولى أي انها تناسب في تقدير دالة البقاء التوزيع عند احجام العينات الصغيرة والمتوسطة والكبيرة .

❖ نلاحظ تناقص القيم الخاصة بالمعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطاء (MSE) كلما زاد حجم العينة وهذا يطابق النظرية الخاصة بهذا المؤشر .

11-الجانب التطبيقي:

لقد تم جمع البيانات المتعلقة بالدراسة لعدد من المصابين بمرض تقوس السيقان عينة بحجم (100) مشاهدة تمثل زوايا الفيومور تيبيا (FTA) للأشخاص المصابين بمرض تقوس السيقان وتم تبويب البيانات للأشخاص المصابين وكما يأتي :

جدول (4) زوايا الفيومور تيبيا (FTA) للأشخاص المصابين بمرض تقوس السيقان

2.26	2.37	2.33	4.72	2.55	5.5	5.12	0.73	2.45	5.01
2.33	2.33	2.26	4.73	4.04	5.71	5.23	0.69	3.49	4.99
2.26	1.26	2.47	4.45	4.06	3.05	6.24	0.6	3.2	5.21
2.27	2.29	1.51	5.78	0.78	5.21	5.73	0.66	3.17	5.26
2.28	6.38	0.49	3.71	3.65	5.01	4.48	0.81	2.13	5.32
5.38	2.28	4.7	5.61	0.77	6.19	5.21	0.65	5.36	6.17
2.36	8.38	3.38	3.39	4.33	6.77	5.48	0.74	5.1	3.84
8.33	2.36	3.64	3.51	3.5	4.48	5.97	0.68	5.43	7.17
2.36	3.36	2.69	4.31	4.11	6.46	5.7	0.68	6.07	7.53
7.33	0.33	2.82	3.7	4.03	5.95	6.02	6.3	6.46	6.88

(Good ness of Fit)

11-11 اختبار حسن المطابقة:

لغرض معرفة أن البيانات الحقيقية تتبع التوزيع المقترح wrapped Mirra distribution n فقد تم أستعمال اختبار حسن المطابقة Good (ness of Fit) وحسب الفرضية الاحصائية الآتية^[2]:

H_0 : The data have wrapped Mirra distribution

H_1 : The data dont have wrapped Mirra distribution

وقد تم توضيح نتائج اختبار فرضية حسن المطابقة الفرضية باستعمال عدة اختبارات كما في الجدول التالي:^[10]
جدول (5) نتائج اختبار حسن المطابقة تم اجراء الاختبار وكانت قيمة

Distribution	Watson's Test	Kuiper Test	Rayleigh test
	P-Value		
wrapped Mirra distribution	8.0990	0.9799	0.9926
Wrapped Exponential Distribution	7.9192	0.9776	0.9893
Wrapped Gamma Distribution	5.2449	0.9741	5.2449

يتبين من الجدول (5) الأتي:

وعن طريق اختبارات فرضية العدم وحسب المعايير المذكورة آنفاً وجدنا أن:

1- تظهر نتائج اختبار فرضية العدم وحسب المعايير المذكورة آنفاً عدم رفض هذه الفرضية عند مستوى معنوية 0.05 لتوزيع wrapped Mirra distribution وكذلك للحالات الخاصة للتوزيع وبعض التوزيعات المستعملة في نمذجة البيانات الدائرية الحقيقية، إذ نلاحظ أن قيمة P-Value كانت أكبر من 0.05 إذ بلغت :

(8.0990 حسب معيار *Watson's Statistic*) (0.9799 حسب معيار *Kuiper goodnessofit*) و(0.9926 حسب معيار

Rayleigh test) وكذلك الأمر بالنسبة الى احصاء الاختبار عند مقارنتها مع القيمة الجدولية ولمستوى معنوية 0.05. وهذا ما

ينطبق على جميع التوزيعات الوارد ذكرها في الجدول (4-2).

2- اظهرت النتائج أفضلية توزيع *wrapped Mirra distribution* على بقية توزيعات المقارنة حيث ان قيمة P-Value كانت هي الاكبر مقارنة بتوزيعات المقارنة وبالنسبة لجميع الاختبارات.

12 معايير المفاضلة بين التوزيعات *Criteria for differentiation between distributions*

سيتم استعمال معيار معلومات اكايكي (*AIC*) ومعيار معلومات بيز اكايكي (*BIC*) ومعيار معلومات اكايكي المصحح (*AICc*) الذي تم الإشارة إليها في الفصل الثاني في المعادلة (26) و(27) و (28) لغرض تحديد أفضل توزيع يمثل ويصف البيانات الحقيقية لعينة الدراسة وحصلنا على قيم المعايير الموضحة في الجدول (6) أدناه.

جدول (6) معايير المفاضلة بين التوزيعات

Distributions	Parameter		Log	AIC	BIC	MSE
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$				
wrapped Mirra distribution	0.1325	0.2973	-179.7245	363.4491	368.63940	0.05861622
Wrapped Exponential Distribution	0.0097	-205.5004	413.00096	415.5960895	0.1972484195
Wrapped Gamma Distribution	0.043388	-231.820629	467.64125	472.8314988	0.0745726494

يتضح من الجدول (6) المذكورة انفاً

1- أن القيم المقدرة للمعلمات للتوزيع المقترح $\hat{\alpha} = 0.1325$ ، $\hat{\beta} = 0.2973$ كانت متوافقة مع القيم الافتراضية للمعلمات الموضحة في الجانب التجريبي المحاكاة.

2- افضلية توزيع (*wrapped Mirra distribution*) مقارنة بالتوزيعات الاخرى قيد الدراسة نتيجة امتلاكه أقل قيمة للمعايير (*BIC, MSE, AIC*) ، وبذلك يعد هو التوزيع الأفضل في تمثيل تنفيذ ووصف عينة الدراسة الحقيقية .

جدول (4-4) قيم مقدر دالة البقاء والدالة التوزيعية ودالة الكثافة الاحتمالية للبيانات الحقيقية

i	θ_i	PDF	S(t)	i	θ_i	PDF	S(t)	i	θ_i	PDF	S(t)
1	0.33	0.113488	0.999857	36	2.82	0.113991	0.995231	71	5.23	0.230979	0.007271
2	0.49	0.113516	0.999599	37	3.05	0.114045	0.994734	72	5.26	0.230987	0.00723
3	0.6	0.113518	0.999579	38	3.17	0.114142	0.993838	73	5.32	0.231061	0.006867
4	0.65	0.113529	0.99948	39	3.2	0.114148	0.993778	74	5.36	0.231168	0.006343
5	0.66	0.113531	0.999461	40	3.36	0.11415	0.993758	75	5.38	0.231209	0.006141
6	0.68	0.113559	0.999203	41	3.38	0.114157	0.993698	76	5.43	0.23125	0.00594
7	0.68	0.113562	0.999183	42	3.39	0.114159	0.993678	77	5.48	0.231266	0.005859
8	0.69	0.113564	0.999163	43	3.49	0.114167	0.993599	78	5.61	0.231299	0.005697
9	0.73	0.113585	0.998965	44	3.5	0.11417	0.993579	79	5.7	0.231348	0.005455
10	0.74	0.113587	0.998945	45	3.51	0.11417	0.993579	80	5.71	0.231373	0.005334
11	0.77	0.113592	0.998906	46	3.64	0.114174	0.993539	81	5.73	0.23139	0.005253
12	0.78	0.113626	0.998588	47	3.65	0.114176	0.993519	82	5.78	0.23139	0.005253
13	0.81	0.113633	0.998529	48	3.7	0.114187	0.993419	83	5.95	0.23139	0.005253
14	1.26	0.113659	0.998291	49	3.71	0.114211	0.9932	84	5.97	0.231464	0.00489
15	1.51	0.113708	0.997834	50	3.84	0.114245	0.992881	85	6.02	0.23148	0.004809
16	2.13	0.113736	0.997576	51	4.03	0.228821	0.017984	86	6.07	0.231554	0.004445
17	2.26	0.113766	0.997298	52	4.04	0.228861	0.017784	87	6.17	0.231554	0.004445
18	2.26	0.113784	0.99714	53	4.06	0.229502	0.014584	88	6.19	0.231571	0.004364
19	2.26	0.113788	0.9971	54	4.11	0.229663	0.013783	89	6.24	0.231785	0.003313
20	2.27	0.113805	0.996941	55	4.31	0.229792	0.013141	90	6.3	0.231794	0.003273
21	2.28	0.113807	0.996921	56	4.33	0.230027	0.011978	91	6.38	0.23181	0.003192
22	2.28	0.113807	0.996921	57	4.45	0.230116	0.011536	92	6.46	0.231992	0.002301
23	2.29	0.113807	0.996921	58	4.48	0.230368	0.01029	93	6.46	0.231992	0.002301
24	2.33	0.113814	0.996862	59	4.48	0.230368	0.01029	94	6.77	0.232017	0.00218
25	2.33	0.113814	0.996862	60	4.7	0.230433	0.009968	95	6.88	0.232117	0.001694
26	2.33	0.113814	0.996862	61	4.72	0.230498	0.009647	96	7.17	0.232133	0.001613
27	2.36	0.113822	0.996782	62	4.73	0.230547	0.009405	97	7.33	0.232299	0.000802
28	2.36	0.113825	0.996762	63	4.99	0.230587	0.009204	98	7.53	0.232341	0.000599
29	2.36	0.113825	0.996762	64	5.01	0.230604	0.009124	99	8.33	0.232358	0.000518
30	2.37	0.113827	0.996742	65	5.01	0.230685	0.008721	100	8.38	0.232366	0.000478
31	2.45	0.113829	0.996723	66	5.1	0.230726	0.00852	sum	387 .31	17.13210 25	49.17323 369
32	2.45	0.113829	0.996723	67	5.12	0.230767	0.008318	man	3.8 73	0.171321 0	0.491732 33

33	2.55	0.113829	0.996723	68	5.21	0.230783	0.008238
34	2.69	0.113857	0.996464	69	5.21	0.230922	0.007553
35	2.69	0.113857	0.996464	70	5.21	0.230963	0.007351

13-الاستنتاجات:

1. افضلية طريقة كريمر فون مايسز (CVM) على بقية طرائق التقدير المدروسة (LS) في تقدير المعلمات لتوزيع *wrapped Mirra distribution* حسب النماذج بشكل عام ثم تليها طريقة المربعات الصغرى ثم طريقة الامكان الاعظم في المرتبة الثالثة في تقدير المعلمات ودالة البقاء .
2. حسب أحجام العينات حصلت طريقة كريمر فون مايسز (CVM) على المرتبة الاولى عند كافة احجام العينات قيد الدراسة ما يدل على ملائمة هذه الطريقة عند حجوم الصغيرة والمتوسطة العينات الكبيرة لتقدير المعلمات ودالة البقاء للتوزيع المقترح .
3. أظهر الجانب التطبيقي ان تقديرات المعلمات لتوزيع *wrapped Mirra distribution* للبيانات الحقيقية كانت متقاربة مع القيم الحقيقية للمعلمات في الجانب التجريبي.
4. من نتائج التطبيق العملي وعن طريق أختبارات حسن المطابقة (Goodness of fit) وجد أن التوزيع الاحتمالي المقترح *wrapped Mirra distribution* يمثل ويصف البيانات الحقيقية افضل من توزيع **Wrapped Exponential Distribution** وتوزيع **Wrapped Gamma Distribution** ، وهذا يعكس أهمية التوزيعات الدائرية مقارنة بالتوزيعات الاحتمالية الاخرى قيد الدراسة.
5. كلما كانت زاوية انحناء الفيومور تيبيا (FTA) صغيرة ، قل احتمال اصابة المريض بامراض تقوس السيقان. فعندما تكون زاوية انحناء بمقدار (0.33) درجة فان احتمال شفاء المريض المصاب (99%)، وعندما تكون زاوية انحناء بمقدار (8.38) فان احتمال شفاء المريض المصاب (0.000478).

14 - التوصيات:

1. أستعمال طريقة كريمر فون مايسز في تقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع *wrapped Mirra distribution* عند احجام العينات الصغيرة والمتوسطة والكبيرة وطريقة المربعات الصغرى عند أحجام العينات المتوسطة والكبيرة .
2. يوصي الباحث تطوير نظرية التوزيعات الملتفة ، حيث سيوفر فهمًا أفضل لكيفية بناء التوزيعات الملتفة من خلال عملية الالتفاف من خلال تطبيق مبدأ تقنية التوزيعات الملتفة (wrapped) على التوزيعات اخرى والتوزيعات المتقطعة متعددة المعلمات .
3. أستعمال طرائق تقدير اخرى لتقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع *wrapped Mirra distribution* ومقارنتها بالطرائق التي اعتمدت في هذه الدراسة.
4. تعد مرض انحراف السيقان من الامراض الخطيرة فلا بد من إقامة دورات توعية ومختبرات خاصة للكشف عن المرض والوقاية من انتشاره في اوقات مبكره .
5. تطبيق أسلوب التوزيعات الملتفة في المجالات الزراعية والصناعية والتجارية وغيرها .

1. Abdul Ahad, Ataf Adwar (2007), (Reliability Estimates for the Exponential Distribution with Two Parameters - A Comparative Study), Master's Thesis submitted to the College of Administration and Economics at the University of Baghdad.
2. Al-Durai'i, Mahdi Ali Abdul-Hussein (2016) "Some methods for estimating the parameters of the reliability function of a complex probabilistic model with practical application." Master's thesis, College of Administration and Economics, University of Baghdad.

1. Coelho, C. A. (2007). *The wrapped Gamma distribution and wrapped sums and linear combinations of independent Gamma and Laplace distributions. Journal of Statistical Theory and Practice, 1(1), 1-29.*
2. Kurz, G., & Hanebeck, U. D. (2015, December). *Parameter estimation for the bivariate wrapped normal distribution. In 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (pp. 1192-1198). IEEE.*
3. Na, J. H., & Jang, Y. M. (2010). *Modeling on asymmetric circular data using wrapped skew-normal mixture. Journal of the Korean Data and Information Science Society, 21(2), 241-250.*
4. Rao, R. S., Ravindranath, V., Rao, A. D., Prasad, G., & Kishore, P. R. (2018). *Wrapped Lomax Distribution: a New Circular Probability*
5. Sen, S., Ghosh, S. K., & Al-Mofleh, H. (2020). *The Mirra distribution for modeling time-to-event data sets. In Strategic Management, Decision Theory, and Decision Science: Contributions to Policy Issues (pp. 59-73). Singapore: Springer Singapore.*
6. Yilmaz, A. (2018). *Wrapped flexible skew Laplace distribution. Istatistik Journal of The Turkish Statistical Association, 11(3), 53-64.*
7. Yilmaz, A., & Biçer, C. (2018). *A new wrapped exponential distribution. Mathematical Sciences, 12, 285-293.*
8. Zinhom, E., Nassar, M. M., Radwan, S. S., & Elmasry, A. (2023). *The wrapped XLindley distribution. Environmental and Ecological Statistics, 30(4), 669-686.*
9. Roy, S., & Adnan, M. A. S. (2012). *Wrapped generalized Gompertz distribution: An application to ornithology. Journal of Biometrics & Biostatistics, 3(6), 1-4.*