مقارنة طرائق تقدير معلمات توزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة باستخدام المحاكاة

أ. د ظافر حسين رشيد   الباحثة آوات سردار وادي
جامعة بغداد– كلية الادارة والاقتصاد
قسم الاحصاء

المستخلص

تم في هذا البحث تقدير معلمات توزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة وذلك باستخدام اثنين من الطرائق المهمة وهما:
طريقة الامكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) والتي تضمنت ثلاث طرائق لحل معادلات الإمكان غير الخطية التي يتم الحصول من خلالها على ثلاث مقدرات للإمكان الأعظم وهي: طريقة نيوتن- رافسن وطريقتين تم تطويرهما في هذا البحث لتلائم حالة البيانات المفقودة وهما تطوير طريقة (Thom) وتطوير طريقة (Sinha)، فضلاً عن تطوير طريقة أخرى تعتمد على توزيع كاما ذي المعلمات الثلاث في إيجاد مقدرات الإمكان الأعظم وهي تطوير طريقة (Bowman, Shenton and Lam) وطريقة التقلص (Shrinkage Method). وتم إجراء مقارنة بين أفضلية هذه الطرائق في الجانب التجريبي من خلال أسلوب المحاكاة باستخدام طريقة مونت كارلو (Monte Carlo) وإجراء عدة تجارب مستخدمين المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) لغرض الحصول على افضل طريقة تقدير.

Abstract

The estimation of the parameters of Two Parameters Gamma Distribution in case of missing data has been made by using two important methods: the Maximum Likelihood Method and the Shrinkage Method. The former one consists of three methods to solve the MLE non-linear equation by which the estimators of the maximum likelihood can be obtained: Newton-Raphson, Thom and Sinha methods. Thom and Sinha methods are developed by the researcher to be suitable in case of missing data. Furthermore, the Bowman, Shenton and Lam Method, which depends on the Three Parameters Gamma Distribution to get the maximum likelihood estimators, has been developed. A comparison has been made between the methods in the experimental aspect to find the best method through simulation by using the Monte Carlo Method. Several experimentations have been made by using the important statistical measure: Mean Square Error (MSE).

1: المقدمة والهدف:

إن أغلب طرائق التقدير الإحصائية تفترض توفر بيانات تامة المشاهدات للعينات المدروسة، ولكن في الكثير من الظواهر الطبيعية، والاقتصادية، والاجتماعية وغيرها تتعرض جزء من بيانات هذه الظواهر الى الفقدان وتختلف أسباب الفقدان فمنها ما يكون متعمداً بسبب الكلفة العالية أو المخاطرة أو بسبب عدم توفر الإمكانيات، ومنها ما يكون غير متعمد مثل تعطل أجهزة التسجيل أو بسبب عدم توفر المستلزمات الضرورية لعملية الإنتاج أو بسبب الكوارث الطبيعية والحروب وغيرها، ومهما اختلفت أسباب الفقدان وتعددت فإننا سنواجه مشكلة معقدة وغير بسيطة وهي ان المشاهدات والبيانات تكون غير تامة Incomplete وفي هذه الحالة يجب معالجة هذه المشكلة من خلال استخدام الطرائق الإحصائية التي تعنى بالبيانات غير التامة.

ومن البيانات التي غالبا ما تحتوي على مشاهدات مفقودة هي بيانات أوقات الفشل الخاصة بالمركبات المفردة في النظام التي يتم تسجيلها من قبل موظفي الصيانة والمشغلين، وترجع معظم أسباب الفقدان الى ان عداد الوقت يسجل للنظام ككل وليس للمركبات المفردة في النظام، فضلاً عن أن مسؤولية موظفي الصيانة هي صيانة الأنظمة أو الأجهزة حين الفشل وليس تسجيل بيانات. وعليه في حالة وجود فقدان في تسجيل أوقات الفشل المفردة الخاصة بالمركبات، وفي حالة كون البيانات المتاحة تمثل العدد الكلي لمرات الفشل والعدد التجميعي لساعات الاشتغال من غير الممكن ملائمة توزيعات أوقات الفشل الشائعة وبالتالي من غير الممكن استخدام الطرائق المألوفة في التقدير. لذلك عمل بعض الباحثين على معالجة هذه المشكلة من خلال تطوير واشتقاق طرائق لتقدير المعلمات ودالة المعولية باستخدام هذا النوع من البيانات غير القياسية ولمختلف توزيعات أوقات الفشل.

ففي عام 1982 قام (Dey)[7] بتطوير أنموذج محاكاة لملاحظة سلوك البيانات التراكمية، واختبار فرضية التوزيع الأسي وذلك باستخدام البيانات ذات الصفات المفقودة.

وفي عام 1999 طور وبرهن (Coit and Dey)[5] اختبار فرضيات لتقييم افتراض توزيع أُسي في حالة وجود أوقات فشل مفقودة، وذلك باستخدام بيانات مراقبة من النوع الثاني وكانت البيانات المتاحة هي أوقات الاشتغال التجميعية وعدد مشاهدات الفشل .

وفي عام 2000 قام (Coit and JIN)[6] بتطوير واشتقاق طريقة الإمكان الأعظم لتوزيع كاما ذي المعلمتين في حالة وجود أوقات فشل مفقودة.

لذا تم في هذا البحث دراسة أحد أهم التوزيعات الواسعة الاستخدام والتطبيق في مجال المعولية ونظرية البقاء الذي غالبا ما يستخدم كأنموذج لتوزيع أوقات الفشل في الأنظمة الكهربائية، والميكيانيكية، والكهروميكانيكية وهو توزيع كاما ذي المعلمتين إذ تم تقدير المعلمات لهذا التوزيع في حالة البيانات المفقودة وذلك باستخدام اثنين من الطرائق المهمة وهما:
طريقة الامكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) والتي تضمنت ثلاث طرائق يتم الحصول من خلالها على ثلاث مقدرات للامكان الأعظم وهي:
طريقة نيوتن- رافسن وطريقتين تم تطويرهما في هذا البحث لتلائم حالة البيانات المفقودة وهما تطوير طريقة (Thom) وتطوير طريقة (Sinha)، فضلاً عن تطوير طريقة أخرى تعتمد على توزيع كاما ذي المعلمات الثلاث في إيجاد مقدرات الامكان الأعظم وهي تطوير طريقة (Bowman, Shenton and Lam) وطريقة التقلص (Shrinkage Method). وتم إجراء مقارنة بين أفضلية هذه الطرائق في الجانب التجريبي من خلال أسلوب المحاكاة باستخدام طريقة مونت كارلو (Monte Carlo) وإجراء عدة تجارب مستخدمين احد المقاييس الإحصائية المهمة وهو متوسط مربعات الخطأ (MSE). وتم التوصل بشكل عام الى ان طريقة (Sinha) المطورة هي الأفضل من بين هذه الطرائق لتقدير المعلمات (k,λ) لامتلاكها اقل متوسط مربعات خطأ مقارنة بالطرائق الأخرى.

2: تقدير معلمات توزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة:

2-1: توزيع أوقات الفشل التجميعية[6]:

Distribution of Cumulative Time- to- Failure

إن طريقة تطوير دالة الإمكان (Likelihood Function) لغرض إيجاد مقدرات الإمكان الأعظم (MLEs) (Maximum Likelihood Estimation) لتوزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة تعتمد على معلمات التوزيع (k,λ) والمشاهدات r وقيم T_{rj} فضلاً عن وقت الفشل وأوقات الفشل غير المعروفة.

إذ أن:

r: يمثل عدد مشاهدات الفشل.

T_{rj}: تمثل وقت الاشتغال التجميعي رقم j الذي يحتوي بالتأكيد r من مرات الفشل، أي ان:

$$T_{rj} = X_1 + X_2 + \ldots + X_r \quad ;j=1,2,\ldots,n_r$$

وعليه إذا كانت أوقات الفشل ممثلة بالمتغير X_i تتبع توزيع كاما ، فأن T_{rj} تتبع توزيع كاما عندما r ثابت، وكما يلي:

X_i: يمثل وقت فشل المركبة.

$$X_i \sim \text{i.i.d gamma}\ (k, \lambda)$$

$$T_{rj} = \sum_{i=1}^{r} X_i$$

$$T_{rj} \sim \text{gamma}\ (rk, \lambda) \quad ; r = 1,2, \ldots, m \quad ; j = 1,2, \ldots, n_r$$

T_{rj}: متغير عشوائي يعتمد على تحديد r، وإذا كان r هو أيضاً متغير عشوائي فأن T تمثل أوقات الفشل التجميعية المرتبطة بالمتغير r.

وعليه فأن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير T_{rj} هي دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية للمتغير T، وان دالة الكثافة للمتغير T يعبر عنها بمجموعة حدود شرطية:

$$f_{T_r}(t) = f_T(t \backslash r) = \frac{\lambda^{rk} t^{rk-1} \exp(-\lambda t)}{\Gamma(rk)} \qquad (1)$$

$$f_T(t) = \sum_{r=1}^{\infty} f_T(t \backslash r) \Pr(R = r)$$

إذ أن:

Pr(R=r): هو احتمال ان البيانات المسجلة التي يتم اختيارها عشوائيا تحتوي بالتأكيد r من حالات الفشل.

فإذا كان لدينا مجموعة من البيانات المسجلة عددها N ولكل من البيانات المسجلة N فيها r وT_{rj} معلومة، وأن أوقات الاشتغال التجميعية (T_{rj}) من مجتمع غير متجانس عندها يكون الأنموذج المستخدم هو الأنموذج المختلط Mixture Model[8].

وان دالة الكثافة الاحتمالية للمجتمع غير المتجانس يعبر عنها بمجموع موزون خاص بدالة الكثافة الاحتمالية. والأوزان تعبر عن احتمال ان الاختيار العشوائي لعضو من المجتمع هو من مجتمع جزئي. وفي هذا البحث يتم تمييز المجتمعات الجزئية بعدد حالات الفشل ضمن مجموعة البيانات المندمجة، أما الأوزان فهي احتمال ان المشاهدة T_{rj} التي يتم اختيارها عشوائيا من بيانات مسجلة عددها N تحتوي r من حالات الفشل، وان الاحتمال هو $\frac{n_r}{N}$.

وعليه فأن:

$$f_T(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^{rk} t^{rk-1} \exp(-\lambda t)}{\Gamma(rk)} \Pr(R = r)$$

وبالتعويض عن **Pr (R=r):**

$$f_T(t \backslash n) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{m} \frac{n_r \lambda^{rk} t^{rk-1} \exp(-\lambda t)}{\Gamma(rk)} \qquad (2)$$

إذ أن:

n_r: تمثل عدد البيانات المسجلة التي تتضمن بالتأكيد r من حالات الفشل التي تتبع توزيع كاما بالمعلمات $((rk, \lambda), r = 1,2,\ldots,m)$.

n: تمثل متجه من العناصر الذي يعبر عن عدد المشاهدات لكل مجتمع جزئي:

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$$

وان:

m: تمثل أكبر عدد من مرات الفشل لأي من البيانات المسجلة ضمن مجموعة البيانات،

إذ أن:

$$\mathbf{m} = \max \{r \backslash n_r > 0\}$$

N: تمثل عدد البيانات المسجلة:

$$N = \sum_{r=1}^{m} n_r \qquad (3)$$

ويمكن إيجاد العدد الكلي لمرات الفشل M المرتبط بالبيانات المسجلة البالغ عددها N كالآتي:

$$M = \sum_{r=1}^{m} r n_r \qquad (4)$$

اما متوسط وقت الفشل $\bar{t}$ فيتم حسابه على وفق الصيغة الآتية:

$$\bar{t} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_r} T_{rj} / M \qquad (5)$$

2-2 : التقدير بطريقة الإمكان الأعظم[6]:

Estimating by Maximum Likelihood Method

ان دالة الإمكان الأعظم لمعلمات توزيع كاما ذي المعلمتين k و λ يعبر عنها مباشرة بأنها تعتمد على بيانات المشاهدات والمعادلة (2)، أي ان:

$$L(k,\lambda)=\underset{r=1}{\overset{m}{\pi}}\left\{\underset{j=1}{\overset{n_r}{\pi}}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i\lambda^{ik}T_{rj}^{ik-1}\exp(-\lambda T_{rj})}{\Gamma(ik)}\right]\right\}$$

(6)

ولكن أحد البدائل ودالة الإمكان المفضلة تطور من خلال ملاحظة أن المجتمعات الجزئية تم تعريفها بوضوح ضمن المجتمع الكلي. وعليه فان الطريقة البديلة يعبر عنها بحاصل ضرب دالة الكثافة الشرطية للمتغير T_{rj}، $f_T(t\backslash r)$ من المعادلة (1):

$$L(k,\lambda)=\underset{r=1}{\overset{m}{\pi}}\ \underset{j=1}{\overset{n_r}{\pi}}\ f_T(k,\lambda\backslash T_{rj})$$

$$=\left[\exp(-\lambda\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r}T_{rj})\right]\underset{r=1}{\overset{m}{\pi}}\ \underset{j=1}{\overset{n_r}{\pi}}\frac{\lambda^{rk}T_{rj}^{rk-1}}{\Gamma(rk)}$$

(7)

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (7) نحصل على:

$$LnL(k,\lambda)=-\lambda M\bar{t}+MkLn\lambda+k\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r}rLnT_{rj}$$

$$-\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r}LnT_{rj}-\sum_{r=1}^{m}n_rLn\Gamma(rk)$$

(8)

ولإيجاد القيم التقديرية لكل من k و λ التي تعظم الدالة (L) نجد المشتقة الجزئية للدالة (LnL) لكل من k و λ ومساواة هذه المشتقات الجزئية بالصفر فنحصل على المعادلات الآتية:

$$\lambda:\frac{\partial}{\partial\lambda}LnL(k,\lambda)=-M\bar{t}+\frac{M\hat{k}}{\hat{\lambda}}=0 \qquad (9)$$

$$\hat{\lambda}=\frac{\hat{k}}{\bar{t}}$$

(10)

$$k:\frac{\partial}{\partial k}LnL(k,\lambda)=MLn\hat{\lambda}+\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r}rLnT_{rj}-\sum_{r=1}^{m}rn_r\psi(r\hat{k})$$

(11)

إذ أن:

$$\psi(rk) = \frac{\Gamma'(rk)}{\Gamma(rk)}$$

وتسمى *ψ(rk)* بدالة كاما الثنائية **Digamma Function**[8].

وبتعويض قيمة $\hat{\lambda}$ من المعادلة (10) في (11) نحصل على معادلة بدلالة $\hat{k}$:

$$\sum_{r=1}^{m} rn_r \psi(r\hat{k}) - MLn\hat{k} = \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r} rLnT_{rj} - MLn\bar{t} \qquad (12)$$

وبفرض أن:

$$k' = \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r} rLnT_{rj} - MLn\bar{t}$$

وتعويضه في المعادلة (12) نحصل على:

$$\sum_{r=1}^{m} rn_r \psi(r\hat{k}) - MLn\hat{k} = k' \qquad (13)$$

إذ يتم استخدام الصيغة التقريبية العامة لدالة كاما الثنائية *ψ(rk)* التي تعطى على وفق الصيغة الآتية:

$$\psi(rk) = Ln(rk) - \frac{1}{2(rk)} - \frac{1}{12(rk)^2} + \frac{1}{120(rk)^4} - \frac{1}{252(rk)^6} + \ldots \qquad (14)$$

ولحل الصيغتين (13) و(14) لإيجاد مقدرات الإمكان الأعظم **Maximum Likelihood Estimations (MLEs)** لكل من **k** و λ سيتم استخدام ثلاث طرائق يتم الحصول من خلالها على ثلاث مقدرات للإمكان الأعظم وهذه الطرائق هي:

2-2-1: طريقة نيوتن- رافسن: Newton-Raphson Method

بتطبيق أسلوب نيوتن رافسن لأجل حل المعادلات غير الخطية يتم إيجاد قيمة $\hat{k}$ عند التكرار **i** وذلك باستخدام الصيغة الآتية[4]:

$$\hat{k}_i = \hat{k}_{i-1} - \frac{g(\hat{k}_{i-1})}{g'(\hat{k}_{i-1})} \qquad (15)$$

ومن خلال الصيغة (13) غير الخطية فأن الدالة $g(\hat{k})$ تكون مساوية الى:

$$g(\hat{k}) = \sum_{r=1}^{m} rn_r \psi(r\hat{k}) - MLn(\hat{k}) - k' \qquad (16)$$

وعليه فأن:

$$\hat{k}_i = \hat{k}_{i-1} - \frac{\sum_{r=1}^{m} r n_r \psi(r\hat{k}_{i-1}) - MLn\hat{k}_{i-1} - k'}{\sum_{r=1}^{m} r^2 n_r \psi'(r\hat{k}_{i-1}) - \frac{M}{\hat{k}_{i-1}}}$$

(17)

وسيرمز لقيمة المقدرات وفق هذه الطريقة بالرمز $\hat{k}_n$ و $\hat{\lambda}_n$ ، إذ نحصل على $\hat{\lambda}_n$ بالتعويض عن $\hat{k}_n$ بالمعادلة (10):

$$\hat{\lambda}_n = \frac{\hat{k}_n}{\bar{t}} \qquad (18)$$

2-2-2: تطوير طريقة Thom :Development of Thom Method

استخدم Thom صيغة تقريبية لدالة كاما الثنائية وذلك بالاعتماد على الصيغة العامة التقريبية لدالة كاما الثنائية (عندما تكون α كبيرة):

$$\psi(\hat{\alpha}) \approx Ln\hat{\alpha} - \frac{1}{2\hat{\alpha}} - \frac{1}{12\hat{\alpha}^2} \qquad (19)$$

لإيجاد الصيغ التقريبية لتقديرات الإمكان الأعظم لمعلمات توزيع كاما ذي المعلمتين (α, θ) في حالة البيانات الكاملة وتوصل الى[9]:

$$\hat{\alpha} = \frac{1 + \sqrt{(1 + 4y/3)}}{4y}, \quad \hat{\theta} = \frac{\bar{t}}{\hat{\alpha}} \qquad (20)$$

أما في هذا البحث تم اقتراح تطوير صيغة تستخدم في حالة البيانات المفقودة بالاعتماد على تقريب Thom ذو الصيغة (19) وكالآتي:

$$\psi(r\hat{k}) \approx Ln(r\hat{k}) - \frac{1}{2(r\hat{k})} - \frac{1}{12(r\hat{k})^2}$$

(21)

وبالتعويض عن (21) في الصيغة (13) لطريقة الإمكان الأعظم نحصل على:

$$\sum_{r=1}^{m} r n_r \left[Ln(r\hat{k}) - \frac{1}{2(r\hat{k})} - \frac{1}{12(r\hat{k})^2} \right] - MLn\hat{k} = k'$$

$$\sum_{r=1}^{m} r n_r Ln(r) - \frac{N}{2\hat{k}} - \frac{\sum_{r=1}^{m} n_r / r}{12\hat{k}^2} = k'$$

$$12\left[\sum_{r=1}^{m} rn_r Ln(r) - k'\right]\hat{k}^2 - 6N\hat{k} - \sum_{r=1}^{m} n_r / r = 0$$

وبحل المعادلة أعلاه بالدستور:

$$\hat{k}_t = \frac{N + \sqrt{N^2 + \frac{4}{3}\left[\sum_{r=1}^{m} rn_r Ln(r) - k'\right]\sum_{r=1}^{m} n_r / r}}{4\left[\sum_{r=1}^{m} rn_r Ln(r) - k'\right]}$$

(22)

وبالتعويض عن $\hat{k}_t$ في (10) نحصل على:

$$\hat{\lambda}_t = \frac{\hat{k}_t}{\bar{t}} \qquad (23)$$

3-2-2: تطوير طريقة Sinha: Development of Sinha Method

اعتمد Sinha التقريب الآتي لدالة كاما الثنائية (عندما تكون α كبيرة):

$$\psi(\hat{\alpha}) \approx Ln\hat{\alpha} - \frac{1}{2\hat{\alpha}} \qquad (24)$$

لإيجاد الصيغ التقريبية لتقديرات الإمكان الأعظم لمعلمات توزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات الكاملة وتوصل الى[1]:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{2y}, \qquad \hat{\theta} = \frac{\bar{t}}{\hat{\alpha}} \qquad (25)$$

أما في هذا البحث تم اقتراح تطوير صيغة تستخدم في حالة البيانات المفقودة بالاعتماد على تقريب Sinha ذو الصيغة (24) وكالاتي:

$$\psi(r\hat{k}) = Ln(r\hat{k}) - \frac{1}{2r\hat{k}} \qquad (26)$$

وبالتعويض عن (26) في الصيغة (13) لطريقة الإمكان الأعظم نحصل على:

$$\sum_{r=1}^{m} rn_r [Ln(r\hat{k}) - \frac{1}{2r\hat{k}}] - MLn\hat{k} = k'$$

$$\sum_{r=1}^{m} rn_r Ln(r) + MLn(\hat{k}) - \sum_{r=1}^{m} \frac{rn_r}{2r\hat{k}} - MLn\hat{k} = k'$$

$$2\hat{k}\sum_{r=1}^{m} rn_r Ln(r) - 2k'\hat{k} = N$$

$$\hat{k}_s = \frac{N}{2\left[\sum_{r=1}^{m} rn_r Ln(r) - k'\right]} \qquad \textbf{(27)}$$

وبالتعويض عن $\hat{k}_s$ في الصيغة (10) نحصل على:

$$\hat{\lambda}_s = \frac{\hat{k}_s}{\bar{t}}$$

(28)

فضلاً عن الطرائق السابقة هناك طريقة أخرى تم تطويرها لغرض تقدير المعلمات k و λ لتوزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة وذلك باستخدام أسلوب الإمكان الأعظم في التقدير وهي:

4-2-2 تطوير طريقة (Bowman, Shenton and Lam):
Development of (Bowman, Shenton and Lam) Method

استخدم (Bowman, Shenton and Lam) حالة خاصة من حالات توزيع كاما ألا وهي توزيع بيرسون من النوع الثالث لتقدير معلمات توزيع كاما ذي المعلمتين (α,θ) في حالة البيانات الكاملة، وقد تم التوصل الى الصيغ الآتية[1][3]:

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{t}\,\overline{\left(\frac{1}{t}\right)}}{\left[\bar{t}\,\overline{\left(\frac{1}{t}\right)} - 1\right]}, \qquad \hat{\theta} = \bar{t} - \left[\overline{\left(\frac{1}{t}\right)}\right]^{-1}$$

(29)

اما في هذا البحث اقترح الباحثان استخدام توزيع بيرسون من النوع الثالث لتقدير المعلمات λ و k في حالة البيانات المفقودة على وفق الأسلوب الآتي:
إذا كان X_i متغير عشوائي Random Variable يتبع توزيع كاما ذي المعلمات الثلاث فأن دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}(x-\gamma)^{k-1} e^{-\lambda(x-\gamma)} I_{(\gamma,\infty)}(x) \qquad ;k,\lambda > 0, \gamma \geq 0$$

(30)

ولإيجاد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي $T_{rj} = \sum_{i=1}^{r} X_i$ استخدم الباحثان طريقة الدالة المولدة للعزوم Moment Generating Function، إذ أن الدالة المولدة للعزوم لتوزيع كاما ذي المعلمات الثلاث ذو الصيغة (30) تعطى كالآتي:

$\mu_X(t) = Ee^{Xt}$

$$= \int_{\gamma}^{\infty} e^{xt} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}(x-\gamma)^{k-1} e^{-\lambda(x-\gamma)} dx$$

وبفرض $y = (x - \gamma)$، نجد أن:

$$\mu_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^k e^{\gamma t}$$

(31)

وبفرض $Z = T_{rj}$، فأن:

$$\mu_Z(t) = Ee^{Zt}$$
$$= Ee^{(X_1+X_2+\ldots+X_r)t}$$
$$= [\mu_{X_1}(t)][\mu_{X_2}(t)]\ldots[\mu_{X_r}(t)]$$

$$= \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{k} e^{\gamma t}\right]\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{k} e^{\gamma t}\right] \cdots \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{k} e^{\gamma t}\right]$$

وعليه فأن الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي $T_{rj} = \sum_{i=1}^{r} X_i$ تعطى كالآتي:

$$\mu_Z(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{rk} e^{r\gamma t}$$

(32)

ومن خلال الصيغة السابقة فأن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير T_{rj} تعطى كالآتي:

$$f_{T_r}(t) = f_T(t \setminus r) = \frac{\lambda^{rk}}{\Gamma(rk)} (t - r\gamma)^{rk-1} e^{-\lambda(t - r\gamma)} ; t \geq \gamma$$

(33)

ومن خلال الصيغة أعلاه تكون دالة الإمكان بالشكل:

$$L(k, \lambda, \gamma) = \underset{r=1}{\overset{m}{\pi}} \underset{j=1}{\overset{n_r}{\pi}} f_T(k, \lambda, \gamma \setminus T_{rj})$$

$$= \exp\left[-\lambda \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_r} (T_{rj} - r\gamma)\right] \underset{r=1}{\overset{m}{\pi}} \underset{j=1}{\overset{n_r}{\pi}} \frac{\lambda^{rk}}{\Gamma(rk)} (T_{rj} - r\gamma)^{rk-1}$$

(34)

ولتقدير المعلمات في دالة الإمكان نجد المشتقة الجزئية للدالة (LnL) لكل معلمة من معلمات توزيع كاما ذي المعلمات الثلاث ومساواة هذه المشتقات الجزئية بالصفر فنحصل على المعادلات الآتية:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial LnL}{\partial k} &= MLn\hat{\lambda} + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r} rLn(T_{rj} - r\hat{\gamma}) - \sum_{r=1}^{m} rn_r\psi(r\hat{k}) = 0 \\
\frac{\partial LnL}{\partial \lambda} &= -\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r}(T_{rj} - r\hat{\gamma}) + \frac{M\hat{k}}{\hat{\lambda}} = 0 \\
\frac{\partial LnL}{\partial \gamma} &= M\hat{\lambda} - \hat{k}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r} r^2(T_{rj} - r\hat{\gamma})^{-1} + \sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r} r(T_{rj} - r\hat{\gamma})^{-1} = 0
\end{aligned}\right\}$$

(35)

من المعادلة الثانية في (35) نحصل على:

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\hat{k}}{A}$$

(36)

إذ أن:

$$A = \frac{\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r}(T_{rj} - r\hat{\gamma})}{M}$$

وبتعويض قيمة $\hat{\lambda}$ من (36) في المعادلة الثالثة من (35) نحصل على:

$$\hat{k} = \frac{A\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r} r(T_{rj} - r\hat{\gamma})^{-1}}{\left[A\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r} r^2(T_{rj} - r\hat{\gamma})^{-1} - M\right]}$$

(37)

ومن خلال جعل قيمة معلمة الإزاحة γ=0 سيتم تبسيط قيمة A الى:

$$A=\frac{\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r}T_{rj}}{M}=\bar{t}$$

وعندها تكون قيم التقديرات $\hat{k}_{bl}$ و $\hat{\lambda}_{bl}$ من (36) و(37):

$$\hat{k}_{bl}=\frac{\bar{t}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r}r(T_{rj})^{-1}}{\left[\bar{t}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_r}r^2(T_{rj})^{-1}-M\right]}\quad ,\hat{\lambda}_{bl}=\frac{\hat{k}_{bl}}{\bar{t}}$$

(38)

3-2 التقدير باستخدام طريقة التقلص (طريقة مقترحة):

Estimation by Shrinkage Method (Proposed Method)

في هذا الجزء سنناقش طريقة تقدير مقترحة من قبلنا والتي ستستخدم في هذا البحث في تقدير المعلمات لتوزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة، وتعتمد المقدرات التي يتم الحصول عليها وفق هذه الطريقة على مقدر التقلص أيضاً، ولكن يتم فيه اخذ التوافيق للتقديرات الناتجة من استخدام طريقة Thom المطورة في حل معادلات الإمكان غير الخطية مع التقديرات الناتجة من استخدام طريقة Sinha المطورة في حل معادلات الإمكان غير الخطية.

ويمكن كتابة خوارزمية طريقة التقلص لتقدير المعلمات لتوزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة وحسب الخطوات الآتية:

1- تقدير معلمات توزيع كاما ذي المعلمتين باستخدام طريقة Thom المطورة واعتمادها كمقدرات أولية للعينة المستخدمة ($\hat{\xi}$).

2- تقدير معلمات توزيع كاما ذي المعلمتين باستخدام طريقة Sinha المطورة واعتمادها كقيم أولية ($\xi_\circ$).

3- إيجاد المقدر ($\tilde{\xi}$) باستخدام صيغة مقدر التقلص التي اقترحها Thompson.

وعليه فأن مقدر التقلص للمعلمة k يعطى كالآتي:

$$\tilde{k}=h_1\hat{k}+(1-h_1)k_\circ \quad 0\le h_1\le 1$$

(39)

وبما أن h_1 قيمة ثابتة تقع بين الصفر والواحد، ولعدم وجود قاعدة موحدة لاختيارها لذلك سوف يتم اشتقاق قيمة h_1 التي تجعل متوسط مربعات الخطأ للمقدر $\tilde{k}$ بالاعتماد على $\hat{k}$ أقل ما يمكن وكما يأتي:

$$MSE(\tilde{k})=E(\tilde{k}-k)^2$$
$$=E[h_1\hat{k}+(1-h_1)k_\circ-k]^2$$

بإضافة وطرح h_1k نحصل على:

$$MSE(\tilde{k}) = h_1^2 MSE(\hat{k}) + 2h_1(1-h_1)(k_\circ - k)B(\hat{k}) + (1-h_1)^2(k_\circ - k)^2$$

وباشتقاق المعادلة أعلاه بالنسبة الى h_1 , ومساواة المشتقة بالصفر,وعندما يكون $\hat{k}$ مقدر غير متحيز نحصل على:

$$h_1 = \frac{(k_\circ - k)^2}{[MSE(\hat{k}) + (k_\circ - k)^2]} \qquad (40)$$

وان مقدر التقلص للمعلمة λ يكون بالشكل الآتي:

$$\tilde{\lambda} = h_2\hat{\lambda} + (1-h_2)\lambda_\circ \qquad 0 \le h_2 \le 1 \qquad (41)$$

وبالطريقة نفسها يمكننا إيجاد قيمة h_2 والذي صيغته النهائية تكون بالشكل الآتي:

$$h_2 = \frac{(\lambda_\circ - \lambda)^2}{[MSE(\hat{\lambda}) + (\lambda_\circ - \lambda)^2]} \qquad (42)$$

3: **الجانب التجريبي**:

يمكن استخدام اسلوب المحاكاة لإجراء مقارنة ما بين الطرائق المدروسة أو المقترحة ومعرفة الطريقة الأفضل، وهذا ما انصب عليه اهتمامنا في هذا المبحث، إذ تم صياغة أنموذج محاكاة بحيث يمكن افتراض العديد من الحالات التي من الممكن وجودها في الواقع العملي من حيث (أكبر عدد من حالات الفشل، وحجم العينة الكلي، وعدد المشاهدات لكل مجتمع جزئي، وقيم المعلمات) بغية تحقيق الهدف الأساس المتمثل في إيجاد أفضل الطرائق المدروسة لتقدير معلمات توزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة وذلك من خلال الإجابة عن التساؤلات الآتية:

1- كيفية تأثر طرائق التقدير أزاء التغير في أكبر عدد من حالات الفشل.

2- كيفية تأثر طرائق التقدير أزاء التغير في حجم العينة.

هذا وان بناء تجربة المحاكاة التي سيتم الحصول من خلالها على الإجابات لهذه التساؤلات تعتمد على اربع مراحل وهي كالآتي:

المرحلة الأولى- تحديد القيم الافتراضية:

1- اختيار أكبر عدد من حالات الفشل m:

تم اختيار قيمتين افتراضيتين لأكبر عدد من حالات الفشل (m = 6,11).

2- اختيار حجم العينة الكلي N:

وقد تم اختيار أربعة أحجام مختلفة من العينات وهي (N=20,30,50,100).

3- اختيار عدد المشاهدات لكل مجتمع جزئي $n=(n_1,n_2,\ldots,n_m)$:

بما انه تم إختيار اكبر عدد من حالات الفشل (m=6,11)، تكون المتجهات التي تمثل المجتمعات الجزئية كالآتي:
$n=(n_1,n_2,\ldots,n_6)$ عندما m=6، وان $n=(n_1,n_2,\ldots,n_{11})$ عندما m=11، وعلى فرض أن عدد المشاهدات التي تمثل أوقات الاشتغال التجميعية التي تتضمن حالة فشل واحدة تساوي صفر ($n_1=0$) ولكافة أحجام العينات ، تكون عدد المجتمعات الجزئية و القيم الافتراضية التي تمثل عدد المشاهدات لكل مجتمع جزئي كما موضح في الجدول الآتي:

جدول (1)

القيم الافتراضية لكل من أكبر عدد من حالات الفشل m وعدد المجتمعات الجزئية وعدد المشاهدات لكل مجتمع جزئي وحجم العينة الكلي

m	6				11			
عدد المجتمعات الجزئية	5				10			
عدد المشاهدات لكل مجتمع جزئي	4	6	10	20	2	3	5	10
N	20	30	50	100	20	30	50	100

4- اختيار قيم المعلمات الافتراضية:

تم اختيار ثلاث قيم افتراضية لمعلمة الشكل k وقيمة افتراضية للمعلمة λ بالتالي سيكون هناك ثلاث نماذج مفترضة وكما موضح في الجدول الآتي:

جدول (2)

القيم الافتراضية لمعلمة الشكل k والمعلمة λ لتوزيع كاما ذي المعلمتين

النماذج المفترضة	الانموذج الأول	الانموذج الثاني	الانموذج الثالث
k	1	2	3
λ	1	1	1

المرحلة الثانية- توليد البيانات:

في هذه المرحلة تم استخدام طريقة التحويل المعكوس (Inverse Transform) على المشاهدات العشوائية ذات التوزيع الأسي الناتجة من مشاهدات عشوائية مولدة من مجتمع واحد من التوزيع المنتظم (0,1) لغرض الحصول على مشاهدات ذات توزيع كاما ذي المعلمتين التي تمثل أوقات الفشل المفردة، ومن ثم تجمع أوقات الفشل المفردة مع بعضها للحصول على أوقات الاشتغال التجميعية وذلك بإستخدام الصيغة الآتية:

$$T_{rj} = \sum_{i=1}^{r} x_i \qquad , r = 1,2,\ldots,m \qquad (43)$$
$$j = 1,2,\ldots,n_r$$

إذ أن:

$$x_i = -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{k} Logu_i , \quad i = 1,2,\ldots.,r \qquad (44)$$

u_i: يمثل متغير منتظم مستمر (Continuous Uniform Variate). ومن ثم تعد أوقات الفشل المفردة مفقودة وان البيانات المتاحة هي فقط أوقات الاشتغال التجميعية T_{rj} وعدد حالات الفشل r.

المرحلة الثالثة- إيجاد التقديرات:

في هذه المرحلة تجري عملية تقدير معلمات توزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة وذلك باستخدام الصيغ المبينة في المعادلات الآتية:
(17)،(18)،(22)،(23),(27)،(28)،(38)،(39),(41).

المرحلة الرابعة- المقارنة بين طرائق التقدير:

يتم في هذه المرحلة المقارنة ما بين طرائق التقدير وذلك باستخدام المعيار الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) وصيغته كما يلي:

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}(\hat{\theta}_i - \theta)^2 \qquad (45)$$

L: تمثل عدد المكررات لكل تجربة و $\hat{\theta}$ مقدر θ حسب الأسلوب المستخدم وقد كان التكرار مساوياً الى (1000) لكل تجربة.

جدول (3)

تقدير معلمة الشكل k بجميع الطرائق وأحجام العينات ولجميع النماذج عندما m=6

Model	N	$\hat{k}_n$	$\hat{k}_t$	$\hat{k}_s$	$\hat{k}_{bl}$	$\hat{k}_{sh}$
1	20	1.180661	1.181149	1.134910	1.219581	1.158030
	30	1.089932	1.090452	1.044303	1.124169	1.067377
	50	1.048254	1.048776	1.002645	1.076054	1.025710
	100	1.030127	1.030648	0.984520	1.046986	1.007584
2	20	2.293641	2.293790	2.246558	2.318181	2.270174
	30	2.193732	2.193881	2.146660	2.215352	2.170270
	50	2.128327	2.128473	2.081256	2.144323	2.104865
	100	2.052534	2.052682	2.005482	2.062568	2.029082
3	20	3.466788	3.466856	3.419255	3.490591	3.443056
	30	3.303605	3.303671	3.256079	3.321187	3.279875
	50	3.168317	3.168385	3.120806	3.180139	3.144595
	100	3.093468	3.093536	3.045960	3.099038	3.069748

جدول (4)
متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير معلمة الشكل k بجميع الطرائق وأحجام العينات ولجميع النماذج عندما m = 6

Model	N	$\hat{k}_n$	$\hat{k}_t$	$\hat{k}_s$	$\hat{k}_{bl}$	$\hat{k}_{sh}$
1	20	0.219601	0.219598	0.204508	0.235964	0.211518
	30	0.102973	0.102947	0.096426	0.114936	0.099154
	50	0.046000	0.045986	0.043455	0.053401	0.044188
	100	0.023558	0.023554	0.022766	0.027795	0.022628
2	20	0.731481	0.731451	0.705442	0.749495	0.717889
	30	0.408274	0.408255	0.391858	0.425460	0.399499
	50	0.217891	0.217883	0.207792	0.233713	0.212280
	100	0.088964	0.088957	0.086123	0.095661	0.086983
3	20	1.612352	1.612335	1.569675	1.668147	1.590438
	30	0.862749	0.862740	0.835807	0.891181	0.848707
	50	0.447087	0.447079	0.433141	0.469963	0.439544
	100	0.195751	0.195749	0.189025	0.205979	0.191821

جدول (5)
تقدير المعلمة λ بجميع الطرائق وأحجام العينات ولجميع النماذج عندما m=6

Model	N	$\hat{\lambda}_n$	$\hat{\lambda}_t$	$\hat{\lambda}_s$	$\hat{\lambda}_{bl}$	$\hat{\lambda}_{sh}$
1	20	1.194603	1.195096	1.148341	1.233981	1.171718
	30	1.098925	1.099449	1.052924	1.133628	1.076186
	50	1.051109	1.051632	1.005388	1.078905	1.028510
	100	1.033452	1.033974	0.987699	1.050349	1.010837
2	20	1.151685	1.151759	1.128056	1.164233	1.139908
	30	1.100312	1.100387	1.076705	1.111197	1.088546
	50	1.068009	1.068083	1.044399	1.076006	1.056241
	100	1.027479	1.027553	1.003923	1.032528	1.015738
3	20	1.159968	1.159991	1.144076	1.167975	1.152033
	30	1.105831	1.105853	1.089933	1.111859	1.097893
	50	1.058069	1.058092	1.042195	1.062031	1.050143
	100	1.032088	1.032110	1.016236	1.033976	1.024173

جدول (6)
متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير المعلمة λ بجميع الطرائق وأحجام العينات ولجميع النماذج
عندما m=6

Model	N	$\hat{\lambda}_n$	$\hat{\lambda}_t$	$\hat{\lambda}_s$	$\hat{\lambda}_{bl}$	$\hat{\lambda}_{sh}$
1	20	0.243243	0.243262	0.225289	0.264597	0.233722
	30	0.116238	0.116229	0.107993	0.130088	0.111565
	50	0.052586	0.052580	0.049286	0.060415	0.050396
	100	0.026605	0.026607	0.025281	0.030977	0.025407
2	20	0.198553	0.198546	0.191431	0.203909	0.194847
	30	0.108326	0.108322	0.103826	0.112791	0.105933
	50	0.059624	0.059622	0.056765	0.063720	0.058053
	100	0.023487	0.023486	0.022663	0.025262	0.022935
3	20	0.190126	0.190125	0.185054	0.196452	0.187526
	30	0.103539	0.103538	0.100262	0.107221	0.101837
	50	0.050805	0.050805	0.049152	0.053348	0.049915
	100	0.022655	0.022655	0.021853	0.023890	0.022191

جدول (7)
تقدير معلمة الشكل k بجميع الطرائق وأحجام العينات ولجميع النماذج عندما m=11

Model	N	$\hat{k}_n$	$\hat{k}_t$	$\hat{k}_s$	$\hat{k}_{bl}$	$\hat{k}_{sh}$
1	20	1.150498	1.150772	1.118163	1.177829	1.134467
	30	1.094805	1.095085	1.062494	1.119711	1.078790
	50	1.055664	1.055942	1.023354	1.071119	1.039648
	100	1.032091	1.032369	0.999787	1.042876	1.016078
2	20	2.332821	2.332898	2.299765	2.361875	2.316332
	30	2.196489	2.196568	2.163445	2.213263	2.180006
	50	2.114595	2.114673	2.081557	2.123263	2.098115
	100	2.056454	2.056532	2.023420	2.059925	2.039976
3	20	3.508881	3.508916	3.475607	3.527823	3.492262
	30	3.286676	3.286712	3.253413	3.303935	3.270063
	50	3.200047	3.200082	3.166781	3.205076	3.183432
	100	3.089478	3.089514	3.056219	3.095910	3.072867

جدول (8)

متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير معلمة الشكل k بجميع الطرائق وأحجام العينات ولجميع النماذج عندما m=11

Model	N	$\hat{k}_n$	$\hat{k}_t$	$\hat{k}_s$	$\hat{k}_{bl}$	$\hat{k}_{sh}$
1	20	0.181270	0.181254	0.172252	0.190090	0.176487
	30	0.108625	0.108610	0.103317	0.117529	0.105698
	50	0.046087	0.046082	0.043418	0.051110	0.044485
	100	0.022584	0.022583	0.021494	0.025221	0.021773
2	20	0.808762	0.808749	0.787537	0.846441	0.797868
	30	0.398460	0.398450	0.386374	0.419959	0.392138
	50	0.201363	0.201357	0.194769	0.206300	0.197789
	100	0.084167	0.084165	0.081476	0.087750	0.082547
3	20	1.853280	1.853270	1.820221	1.889703	1.836468
	30	0.903871	0.903861	0.885712	0.935539	0.894509
	50	0.472310	0.472308	0.460001	0.476940	0.465877
	100	0.210840	0.210838	0.205940	0.217912	0.208112

جدول (9)

تقدير المعلمة λ بجميع الطرائق وأحجام العينات ولجميع النماذج عندما m=11

Model	N	$\hat{\lambda}_n$	$\hat{\lambda}_t$	$\hat{\lambda}_s$	$\hat{\lambda}_{bl}$	$\hat{\lambda}_{sh}$
1	20	1.160203	1.160478	1.127619	1.187812	1.144049
	30	1.096927	1.097207	1.064552	1.122069	1.080879
	50	1.058863	1.059142	1.026446	1.074605	1.042794
	100	1.034526	1.034805	1.002151	1.045294	1.018478
2	20	1.170091	1.170130	1.153496	1.184425	1.161813
	30	1.101854	1.101894	1.085276	1.110172	1.093585
	50	1.059657	1.059696	1.043102	1.064009	1.051399
	100	1.029285	1.029324	1.012749	1.031044	1.021036
3	20	1.173486	1.173498	1.162358	1.179734	1.167928
	30	1.098615	1.098627	1.087500	1.104362	1.093064
	50	1.067553	1.067565	1.056454	1.069193	1.062009
	100	1.030546	1.030558	1.019453	1.032675	1.025005

جدول (10)
متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير المعلمة λ بجميع الطرائق وأحجام العينات ولجميع النماذج عندما m=11

Model	N	$\hat{\lambda}_n$	$\hat{\lambda}_t$	$\hat{\lambda}_s$	$\hat{\lambda}_{bl}$	$\hat{\lambda}_{sh}$
1	20	0.201110	0.201101	0.190769	0.210934	0.195663
	30	0.114221	0.114209	0.108416	0.124037	0.111044
	50	0.049788	0.049786	0.046714	0.055407	0.047982
	100	0.025028	0.025029	0.023664	0.027646	0.024079
2	20	0.207934	0.207931	0.202369	0.216578	0.205081
	30	0.104104	0.104102	0.100863	0.109059	0.102414
	50	0.053044	0.053042	0.051257	0.054334	0.052081
	100	0.021910	0.021909	0.021177	0.022849	0.021474
3	20	0.212657	0.212656	0.208820	0.216438	0.210707
	30	0.105057	0.105056	0.102913	0.108529	0.103954
	50	0.053677	0.053677	0.052268	0.054073	0.052942
	100	0.024364	0.024364	0.023789	0.025137	0.024046

4 : الاستنتاجات والتوصيات

4-1: الاستنتاجات:

من خلال تنفيذ تجارب المحاكاة وبناءً على ما تم تحليله من نتائج الجانب التجريبي فقد تم التوصل الى الاستنتاجات الآتية:

1- إن قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لتقدير كل من المعلمتين λ,k تتناقص بزيادة حجم العينة ولجميع طرائق التقدير وهذا ما ينسجم مع النظرية الإحصائية.

2- من خلال نتائج المحاكاة وبالاعتماد على المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ يمكن القول بشكل عام ان طريقة Sinha المطورة تأتي من حيث الأفضلية بالمرتبة الأولى في تقدير المعلمتين λ,k لتوزيع كاما ذي المعلمتين في حين تأتي طريقة التقلص بالمرتبة الثانية تليها طريقة Thom المطورة بالمرتبة الثالثة ومن ثم طريقة نيوتن- رافسن بالمرتبة الرابعة وطريقة (Bowman, Shenton and Lam) المطورة بالمرتبة الخامسة.

4-2: التوصيات:

1- تطوير واشتقاق الطرائق الأخرى المستخدمة في حل معادلات الإمكان غير الخطية لتوزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات الكاملة لتلائم حالة البيانات المفقودة ومقارنتها مع الطرائق التي تم استخدامها في هذا البحث.

2- تطوير واشتقاق طرائق تقدير المعلمات للتوزيعات الأخرى والمستخدمة في حالة البيانات الكاملة لتلائم حالة البيانات غير القياسية والمتمثلة بأوقات الاشتغال التجميعية وعدد حالات الفشل وذلك لان البيانات الخاصة بأوقات الفشل المفردة غالباً ما تحتوي على مشاهدات مفقودة مما يؤدي الى عدم إمكانية استخدام الطرائق الاعتيادية في التقدير.

المصادر العربية:

1. الهندي، عدي وليد تيودور (1998)، دراسة مقارنة لطرائق تقدير معالم دالة توزيع كاما لحساب المعولية مع تطبيق عملي، رسالة ماجستير في بحوث العمليات، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.
2. وادي, آوات سردار(2007),مقارنة طرائق تقدير معلمات ودالة معولية توزيع كاما ذي المعلمتين في حالة البيانات المفقودة باستخدام المحاكاة,رسالة ماجستير في الاحصاء,كلية الادارة والاقتصاد, جامعة بغداد.

المصادر الأجنبية:

3. Bowman, K.O., Shenton, L.R. and Lam, H.K. (1987) "Simulation and Eastimation Problems Associated with the 3-Parameter Gamma Density". Communications in Statistics, Series (B)- Simulation and Computation, Vol.16, No.4, PP.1147-1188.
4. Choi, S.C., and Wette, R. (1969), "Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of the Gamma Distribution and Their Bias", Technometrics, Vol.11, No. 4, PP. 683- 690.
5. Coit, D.W., and Dey, K.A. (1999), "Analysis of Grouped Data from Field- Failure Reporting Systems", Reliability Engineering and System Safety, 65, 95- 101.
6. Coit, D.W., and JIN, T. (2000), "Gamma Distribution Parameter Estimation for Field Reliability Data with Missing Failure Times", IEEE Transactions, 32, 1161- 1166.
7. Dey, K.A. (1982), "Statistical Analysis of Noisy and Incomplete Failure Data in Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS), IEEE, Piscataway. NJ. PP. 93- 97.
8. Lawless. J. F. (2003), "Statistical Models and Methods for Lifetime Data", 2nd ed., New Jersey, John Wiley & Sons, Inc.
9. Shenton, L. R., and Bowman, K.O. (1970), "Remarks on Thom's Estimators for the Gamma Distribution", Monthly Weather Review, Vol. 98, No. 2, PP. 154- 160.