طرائق استخدام مخطط الدورية في حالة القيم المفقودة لأنموذج المستقر AR(2)

م. د . جنان عباس ناصر

معهد الادارة- الرصافة

Abstract

In this study, we investigate the behavior of the estimated spectral density function of stationary time series in the case of missing values, which are generated by the second order Autoregressive (AR (2)) model, when the error term for the AR(2) model has many of continuous distributions. The Classical and Lomb periodograms used to study the behavior of the estimated spectral density function by using the simulation.

الخلاصة

في هذا البحث نتحرى عن سلوك لدالة الكثافة الطيفية المقدرة في السلاسل الزمنية المستقرة في حالة القيم المفقودة، المولدة من أنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الثانية ((AR(2)) عندما يكون حد الخطأ لأنموذج AR(2) يتبع عدد من التوزيعات المستمرة. أذ استخدم مخطط الدورية الكلاسيكي ومخطط الدورية Lomb لدراسة سلوك دالة الكثافة الطيفية المقدرة باستخدام المحاكاة.

1. المقدمة

استخدم التحليل الطيفي في الفروع المختلفة لعلم الفلك، التي نواجه فيه مشكلة ايجاد الدوريات المخفية في المشاهدات. فأذا كانت البيانات مفرغة بصورة منتظمة في الوقت، فان مخطط الدورية الكلاسيكي سيكون الاداة الاساسية لتقييم القوة الطيفية. لكن اغلب المشاهدات الفلكية تكون مفرغة بصورة غيرمنتظمة في الوقت لعدة اسباب منها:تغييرحالات الطقس خلال اليوم،او كما هو الحال في حالة البيانات المتعلقة بهطول الامطارأو درجات الحرارة في مناطق معينة لفترات معينة من السنوات، او بسبب عطل جهازالتسجيل اوغياب المسجل كالذي يحدث في بعض الحالات في هيئة الانواء الجوية اوبسبب الظروف غيرالطبيعية كالكوارث الطبيعية والحروب. اذ تظهرالقيم المفقودة اما بشكل عشوائي غيرمنتظم اوبشكل منتظم، اي نلاحظ قيم السلسلة الزمنية لعدد ثابت من المرات وتفقد قيمها لعدد ثابت من المرات اوتفقد بهيئة قطاع (مجموعة من القيم المتعاقبة) اوعدة قطاعات.لذا تناول عدد غيرقليل من الباحثين اساليب التقديرالطيفي لبيانات السلسلة الزمنية غيرالمنتظمة اوعندما تحتوي السلسلة الزمنية على قيم مفقودة كالذي يحدث عند تسجيل المشاهدات المناخية والتي يمكن نمذجتها كسلسلة زمنية مستقرة (بعد أزالة الاتجاه والموسمية في السلسلة) ونذكرمنهم الباحث Lomb [3,6] عام 1976الذي اعاد تعريف مخطط الدورية الذي اسماه بـ normalized lomb periodogram والذي استخدم للكشف عن الدوريات المخفية في السلاسل الزمنية،تحت افتراض ان السلسلة الزمنية (X_t) تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفرتباين مقداره (σ^2) .اذ استخدم انحرافات القيم عن وسطها الحسابي $(X_j - \bar{X})$ وتباين العينة σ^2 في حساب مخطط الدورية Lomb ومن هنا جاءت تسميته بـ normalized.فقد استخدم اسلوب اقل المربعات في تقديرالمركبات الجيبية (sinusoid) للبيانات عند نقاط وقت جديدة اعاد تعريفها من خلال اقتراح ما يسمي بـ time delay.

وكذلك استخدم الباحث Scargle عام 1982 [7,1] مخطط الدورية للبيانات المعاينة بصورة غيرمنتظمة. فقد اعتمد على قيم المشاهدات الاصلية في حساب مخطط الدورية فضلا عن اعتماد نقاط الوقت الجديدة المقترحة من قبل الباحث Lomb،ويشارلمخطط الدورية لـ Lomb وScargle بـ LS.

وقارن الباحث Vityazen [7] في عام 1997 بين مقدرالقوة الطيفية باستخدام مخطط الدورية الكلاسيكي ومخطط الدورية LS، وبحث اوجه التشابه بينهما لتحليل السلاسل الزمنية لبيانات مفرغة بصورة غيرمنتظمة.عندما تكون السلسلة الزمنية تحتوي فجوات دورية (اي تحتوي على قيم مفقودة ومكررة m من المرات)،وعندما تكون السلسلة الزمنية تحتوي فجوة كبيرة (اي مجموعتين من المشاهدات كل واحدة منها تتكون من n من النقاط المتعاقبة تكرربـ p من النقاط المفقودة.

على الرغم من ان مخطط الدورية لـ LS يفقد خاصية الوصف بدلالة النافذه الطيفية والربط بين مخطط الدورية LS ودالة الارتباط الذاتي، ألا انه يعرف السلوك الاحصائي بصورة جيدة. ان استخدام مخطط الدورية الكلاسيكي في حالة البيانات المفرغة بصورة غير منتظمة او في حالة القيم المفقودة يحقق كل العلاقات الاساسية للتحليل الطيفي الكلاسيكي في حالة البيانات المفرغة بصورة منتظمة لكن بخصائص أحصائية معقدة.

وفي هذا البحث ندرس سلوك دالة الكثافة الطيفية المقدرة باستخدام مخطط الدورية الكلاسيكي ومخطط الدوريةLomb في السلاسل الزمنية المستقرة بحالة القيم المفقودة والمولدة من عدة نماذج للانحدارالذاتي من الرتبة الثانية عندما تكون الاخطاء تتبع عدد من التوزيعات المستمرة باستخدام المحاكاة.مفترضين ان حد الخطأ لأنموذج AR(2)يتبع عدد من التوزيعات المستمرة،ولحجمين من العينات المختارة(T=100,150) وبنسبة 20% من القيم المفقودة فيها للحصول على حجمين من العينات،الاول عندما يكون حجم العينة متوسط (N=80) ،والثاني عندما يكون حجم العينة كبير(N=120).وقد اعتمد قيم المتوسط والتباين لدالة الكثافة الطيفية المقدرة ($\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$) وعلى التوالي) فضلا عن متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لكل قيم w ومجموع قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ لكل قيم w الذي يمكن ان يمثل مجموع المربعات (SSE)ولكلا المقدرين في كل تجربة كررت 500 مرة كمعيارلدراسة سلوك دالة الكثافة الطيفية المقدرة. لنستعرض مخطط الدورية الكلاسيكي في حالة البيانات المفرغة بصورة منتظمة في الوقت،بافتراض لدينا N من المشاهدات X_t لـ t=1,2, ...N استحصلت عند اوقات معاينة منتظمة، ولتمثيل السلسلة الزمنية $\{X_t\}$ في حقل التكرارنستخدم تمثيل فورير [4, 5] وكماياتي:

$$X_t = a_0 + \sum_{k=1}^{[(N-1)/2]} (a_k \cos w_k t + b_k \sin w_k t) \quad , \text{ if } N \text{ is odd}$$

...(1)

$$X_t = a_0 + \sum_{k=1}^{[(N/2)-1]} (a_k \cos w_k t + b_k \sin w_k t) + a_{N/2} \cos w_{N/2} t \quad , \text{ if } N \text{ is even}$$

اما تكرار فورير (w_k) فيكون مساوي لـ

$$w_k = (2\pi k)/N \ , \ k = 0,1,2,\ldots[N/2], \text{ if } N \text{ is even}$$

& K= 0, 1,2,..., [(N-1)/2] , if N is odd ...(2)

وان [ ] تعني عدد صحيح، وتكون معاملات فورير (a_k و b_k) وفق الصيغة

$$a_k = (1/N)\sum_{t=1}^{N} X_t \cos w_k t \quad , \ k = 0 \,\&\, k = N/2 \qquad \text{if } N \text{ is even}$$

...(3)

$$a_k = (2/N)\sum_{t=1}^{N} X_t \cos w_k t \quad , \ k = 1,2,\ldots,(N-1)/2 \quad \text{if } N \text{ is odd}$$

$$b_k = (2/N)\sum_{t=1}^{N} X_t \sin w_k t \quad , \ k = 1,2,\ldots,(N-1)/2 \quad \text{if } N \text{ is odd}$$

حيث ان معاملات فورير تمثل معاملات الانحدار القياسية في انموذج الانحدار الاتي :

$$X_t = \sum_{k=0}^{[N/2]} (a_k \cos w_k t + b_k \sin w_k t) + e_k$$

وتكون e_k متغيرات عشوائية مستقلة وموزعة طبيعيا بمتوسط صفروتباين مقداره σ^2 . اما مخطط الدورية (Periodogram) الذي قدم من قبل الباحث Schuster عام 1898 للبحث عن المركبات الدورية المخفية في السلاسل الزمنية الدورية والذي يرمز له بـ ($I(w_k)$) فيكون بالصيغة

$$\left.\begin{aligned} I(w_k) &= N a_0^2 , \quad k=0 \\ I(w_k) &= (N/2)(a_k^2 + b_k^2) , \quad k=1,2,\ldots,[(N-1)/2] , \quad \text{if } N \text{ is odd} \\ I(w_k) &= N a_k^2 , \quad k = N/2 , \quad \text{if } N \text{ even} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

وبذلك فان جدول تحليل التباين لمخطط الدورية يكون وفق الصيغة

جدول (1) يمثل تحليل التباين لمخطط الدورية

Source for the Freq.	df	Sum of squares
mean $w_0 =$	1	$N a_0^2$
$w_1 = (2\pi)/N$	2	$(N/2)(a_1^2 + b_1^2)$
$w_2 = (4\pi)/N$	2	$(N/2)(a_2^2 + b_2^2)$
.	.	.
$w_{(N-1)/2} = ((N-1)\pi)/N$	2	$(N/2)(a_{(N-1)/2}^2 + b_{(N-1)/2}^2)$
.	.	.
(exist only for eneN) $w_{N/2} = \pi$	1	$N a_{(N/2)}^2$
Total	N	$\sum_{t=1}^{N} X_t^2$

ويمكن كتابة $\sum_{t=1}^{N} X_t^2$ عندما تكون N عدد فردي وعدد زوجي وفق الصيغة الاتية وعلى التوالي :

$$\sum_{t=1}^{N} X_t^2 = Na_0^2 + (N/2)\sum_{t=1}^{[(N-1)/2]} (a_k^2 + b_k^2) , \quad \text{if } N \text{ is odd}$$

$$\sum_{t=1}^{N} X_t^2 = Na_0^2 + (N/2)\sum_{t=1}^{[(N-1)/2]} (a_k^2 + b_k^2) + Na_{N/2}^2 , \quad \text{if } N \text{ is even}$$

ان مقــدر دالــة طيــف العينــة (the sample spectrum) $\hat{f}(w_k)$ عنــد تكــرارات فــورير $w_k = (2\pi k)/N$ لـ $k = 0,1,2,\ldots[N/2]$ بدلالة مقدر دالة التباين الذاتية ($\hat{\gamma}_k$) تكون

$$\hat{f}(w_k) = (1/(2\pi)) \sum_{k=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{\gamma}_k \exp - i w_k$$

حيث ان مقدر دالة التباين الذاتي تكون مساوية لـ $\hat{\gamma}_k = (1/N)\sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \overline{X})(X_{t+k} - \overline{X})$.

وبذلك نعيد كتابة مقدردالة طيف العينة ($\hat{f}(w_k)$) بدلالة مخطط الدورية ($I(w_k)$) عند تكرارات فورير[2] وفقا للصيغة

$$\hat{f}(w_k) = (1/4\pi)\, I(w_k) \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots[N/2] \text{ , if N is even} \quad \ldots (5)$$

فأذا كانت X_t عملية طبيعية (Gaussian)، فان مقدر دالة طيف العينة ($\hat{f}(w_k)$) يتوزع

$$\hat{f}(w_k) \sim f(w_k)(\chi^2(2)/2) \quad \ldots (6)$$

أذ ان $\chi^2(2)$ تمثل توزيع مربع كاي بدرجة حرية أثنان. وبذلك فان التوقع ($E(\hat{f}(w_k))$) والتباين ($V(\hat{f}(w_k))$) لمقدردالة طيف العينة ($\hat{f}(w_k)$) يكونان وفق الصيغتين ادناه وعلى التوالي

$$E(\hat{f}(w_k)) = E[f(w_k)(\chi^2(2)/2)] = f(w_k) \quad \ldots (7)$$

$$V(\hat{f}(w_k)) = V[f(w_k)(\chi^2(2)/2)] = [f(w_k)]^2 \quad \ldots (8)$$

بالرغم من مقدردالة طيف العينة($\hat{f}(w_k)$) المحسوبة عند تكرارات فوريرتكون تقديرغيرمتحيز،الا انها تكون مقدر غير مرضي، لانها تكون تقدير غير متسق (not consistent)، أذ ان التباين لـ($\hat{f}(w_k)$) لا يقترب من الصفر عندما يزداد حجم العينة ويقترب من الملانهاية،بالرغم من أن ترتيبات مخطط الدورية تكون مستقلة لاي تكرارين مختلفين من تكرارات فورير،اي ان

$$Cov(\hat{f}(w_k), \hat{f}(w_j)) = 0 \quad \ldots (9)$$

2. مخطط الدورية الكلاسيكي The classical periodogram

لنعيد تعريف مخطط الدورية الكلاسيكي في السلاسل الزمنية المفرغة بصورة غيرمنتظمة في الوقت،أو في حالة القيم المفقودة ولمجموعة N من المشاهدات $X_j = X(t_j)$ لـ j=1,2, ...N استحصلت عند اوقات معاينة عشوائية t_j [2,5, 7] ، حيث ان تحويل فوريرالسريع المتقطع يكون وفق الصيغة

$$DFT(w) = \sum_{j=1}^{N} X(t_j) \exp - iwt_j \quad \ldots (10)$$

اما مخطط الدورية الكلاسيكي فيكون وفق الصيغة

$$P(w) = (1/(2\pi N)) \left|DFT(w)\right|^2$$

$$P(w) = (1/(2\pi N)) [(\textstyle\sum_{j=1}^{N} X_j \cos wt_j)^2 + (\sum_{j=1}^{N} X_j \sin wt_j)^2] \ldots (11)$$

بالرغم من انه يمكن حساب مخطط الدورية الكلاسيكي عند اي تكرار، الا انه يتم حسابه عند مجموعة معينة من التكرارات المفرغة بصورة منتظمة والتي تدعى بتكرارات فورير $w_k = (2\pi k)/N$ لـ K=0,1,...[N/2]. اذ ان N تمثل عدد نقاط المعاينة باوقات غير منتظمة، او عدد القيم الغير مفقودة في السلسلة الزمنية. وفي هذه الحالة يفقد مخطط الدورية خاصية التعامد للمركبات الجيبية عند تكرارات فوريرالتي تم باستعادتها من قبل الباحث Lomb باعادة تعريفه لمخطط الدورية والذي سيرد شرحه في المبحث التالي.

---

[2] لمزيد من التفاصيل انظر المصدر (5 - p .265-267) .

3. مخطط الدورية The Lomb periodogram

ذكرنا سابقا في المبحث (2) بأن مخطط الدورية الكلاسيكي يفقد خاصية التعامد للمركبات الجيبية عند تكرارات فوريرفي حالة القيم المفقودة. لذا اقترح الباحث **Lomb** بما يسمي بـ **time delay** ويرمز له بـ τ لاسترداد خاصية التعامد للمركبات الجيبية عند تكرارات فورير[7,6,2]. ولمجموعة **N** من المشاهدات $X_j = X(t_j)$ لـ **j=1,2, ...N** استحصلت عند اوقات معاينة عشوائية t_j (بيانات مفرغة بصورة غير منتظمة في الوقت)، اذ يتم ايجاد قيمة τ عند كل تكرارمن تكرارات فورير $w_k = ((2\pi k)/N) > 0$ وفق الصيغة الاتية

$$\tan(2 w \tau) = [(\textstyle\sum_{j=1}^{N} \sin(2wt_j))/(\sum_{j=1}^{N} \cos(2wt_j))] \quad ...(12)$$

وبذلك يعيد الباحث **Lomb** تعريف نقاط الوقت $\hat{t}_j$ جديدة التي تكون وفق الصيغة

$$\hat{t}_j = t_j - (1/(2w)) \ \arctan[(\textstyle\sum_{j=1}^{N} \sin(2wt_j))/(\sum_{j=1}^{N} \cos(2wt_j))] \quad ...(13)$$

أما مخطط الدورية لـ **Lomb** ، للبيانات المفقودة عند نقاط الوقت الجديدة $\hat{t}_j$ فيكون وفق الصيغة

$$P(w) = (1/(2\pi N))[((\textstyle\sum_{j=1}^{N} X_j \cos(w\hat{t}_j))^2 / (\sum_{j=1}^{N} \cos^2(w\hat{t}_j))) +$$

$$((\textstyle\sum_{j=1}^{N} X_j \sin(w\hat{t}_j))^2 / (\sum_{j=1}^{N} \sin^2(w\hat{t}_j)))] \quad ...(14)$$

أذ يكون مخطط الدورية لـ **Lomb** مفضل على مخطط الدورية الكلاسيكي في حالة بيانات مفرغة بصورة غير منتظمة في الوقت، لانه يمتلك سلوك احصائي بسيط ويكون مكافيء لتقليص مجموع اقل المربعات للموجات الجيبية للبيانات.

4. الجانب التجريبي

يتضمن هذا المبحث استخدام الاساليب المتقدم ذكرها في الجانب النظري للتعرف على سلوك دالة الكثافة الطيفية المقدرة للسلاسل الزمنية المستقرة ذات القيم المفقودة من خلال استخدام مخطط الدورية الكلاسيكي ومخطط الدورية لـ **Lomb**. فقد استخدم الـ **Matlab** لكتابة البرامج لمخطط الدورية الكلاسيكي في حالة القيم المفقودة ومخطط الدورية لـ **Lomb** لغرض الحصول على نتائج المحاكاة التي شملت أنموذج الانحدارالذاتي من الرتبة الثانية لتوليد السلاسل الزمنية. وقد اختيرت اربعة قيم مقترحة لمعلمات أنموذج **AR(2)** التي تحقق الاستقرارية، وبافتراض ان حد الخطأ لأنموذج **AR(2)** يتبع عدد من التوزيعات المستمرة في حالة اختلاف قيمة المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ، وفي حالة تساوي قيمة المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ.وقد كررت التجربة **500** مرة لكلا المقدرين (مخطط الدورية الكلاسيكي و**Lomb**) وبحجمين من العينات(**T=100,150**)عندما تكون نسبة القيم المفقودة فيها **20%** للحصول على حجمين من العينات، الاول عندما يكون حجم العينة متوسط (**N=80**) ،والثاني عندما يكون حجم العينة كبير(**N=120**) وعلى التوالي، لغرض دراسة سلوك دالة الكثافة الطيفية المقدرة والمقارنة بين المقدريين. فقد اعتمدت قيم المتوسط والتباين لدالة الكثافة الطيفية المقدرة ($\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ وعلى التوالي) والتي يتم احتسابها وفق الصيغتين (11 و14) المتقدم ذكرها في المبحثين (2 و3) وعلى التوالي عند قيم معينة لتكرارات فوريرفضلا عن اعتماد متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لتكرارات فورير ومجموع مربعات الخطأ (**SSE**) الذي يمثل المجموع الكلي لقيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ لكل قيم **w**. فضلا عن ذلك فقد تم الاستعانة بالاشكال البيانية لقيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولكل تجارب المعتمدة في البحث في دراسة سلوك دالة الكثافة الطيفية المقدرة والتي عرض بعض منها في الملحق ولكلا المقدرين الكلاسيكي و **Lomb**. وفيما يلي مراحل بناء برامج المحاكاة وتنفيذها، وملخص النتائج التي تم التوصل اليها.

4.1 مراحل بناء تجارب المحاكاة

ان البرنامج المصمم يحقق للباحث امكانية اختياراي حجم للعينة، لكن في هذا البحث اعتمدنا على دراسة حجمين من العينات T=100,150. لتوليد البيانات $\{X_1, X_2, \ldots, X_T\}$ من انموذج AR(2) الذي يكون وفق الصيغة

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + U_t \ldots(15)$$

ولقيم اولية مقترحة للمعلمتين (φ_1, φ_2) والتي تحقق شروط الاستقرارية الاتية

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \ \varphi_2 + \varphi_1 < 1 \\ 2.\ \ \varphi_2 - \varphi_1 < 1 \\ 3.\ \ -1 < \varphi_2 < 1 \end{array}\right\} \ldots\ (16)$$

وكما مبين في الجدول (2) ادناه

جدول (2) يمثل القيم الاولية المقترحة لأنموذج AR(2)

No.of model	1	2	3	4
φ_1	-0.8	-0.5	0.5	0.8
φ_2	0.1	0.4	0.4	0.1

لنبين تاثير اقتراب وابتعاد قيم معلمتي (φ_1, φ_2) للأنموذج AR(2) على سلوك دالة الكثافة الطيفية. وبافتراض ان الاخطاء العشوائية لأنموذج AR(2) تتبع عدد من التوزيعات المستمرة بالمعلمات المدونة في الجدول(3). ولنبين تاثير الدالة الاحتمالية لتوزيع حد الخطأ (U_t) على سلوك دالة الكثافة الطيفية المقدرة في حالتين:اولا- في حالة عدم تساوي المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ (التوزيع الطبيعي والمنتظم وكاما والاسي)، ولحجمي العينتين المفترض في حالة القيم المفقودة N=80,120 للسلاسل الزمنية المستقرة والمولدة وفقا لمعلمتي (φ_1, φ_2) المفترضة في الجدول(2)لأنموذج AR(2)، والمبينة في الجدول(3). ثانيا- في حالة تساوي المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ (التوزيع الطبيعي وكاما والاسي)عند القيمة $\mu = 0.5$ و $\sigma^2 = 0.25$، ولحجم واحد للعينة المفترض في حالة القيم المفقودة عند N=80 للسلاسل الزمنية المستقرة والمولدة وفقا لمعلمتي (φ_1, φ_2) المفترضة في الجدول (2) لأنموذج AR(2)، والمبينة في الجدول(3).

جدول (3) يمثل التوزيعات المقترحة لحد الخطأ (U_t) لأنموذج AR(2)

The Dist^n.	في حالة عدم تساوي المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ (U_t)			
	Normal	Uniform	Gamma	Exponential
	$U_t \sim N(0,2)$	$U_t \sim U(0,1)$	$U_t \sim Gam(0.5,1)$	$U_t \sim Exp(0.5)$
	في حالة تساوي المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ (U_t)			
	$U_t \sim N(.5,.25)$		$U_t \sim Gam(1,0.5)$	$U_t \sim Exp(0.5)$

ولغرض توليد القيم المفقودة في السلسلة الزمنية لأنموذج **AR(2)**، فقد تم وضع القيمة $X_t = 0$ وحذفها من السلسلة أذا كانت قيمة حد الخطأ (U_t) أكبر من **0.8** اي ان $U_t > 0.8$ أنظر المصدر**[2]** أذ يمكن للباحث وضع اي معيار او قيمة تستخدم للحذف القيمة X_t للحصول على سلسلة زمنية ذات قيم مفقودة بصورة عشوائية، وفيما عدا ذلك يتم ابقاء القيمة X_t في السلسلة الزمنية المولدة، للحصول على سلسلة زمنية جديدة بقيم مفقودة بصورة عشوائية لتكون بـ **N** من المشاهدات $X_j = X(t_j)$ لـ **j=1,2, ... N** عند اوقات معاينة عشوائية t_j ، وان **N** تحدد من قبل الباحث في البرنامج، وقد اختيرت احجام العينات للسلسلة الزمنية ذات القيم المفقودة لتكون قيمة زوجية ونسبة القيم المفقودة في السلسلة الزمنية تكون **20%** من **T=100,150** للحصول على حجمين من العينات، الاول عندما يكون حجم العينة متوسط **(N=80)**، والثاني عندما يكون حجم العينة كبير**(N=120)**. ولايجاد قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ التي تمثل قيم متوسط وتباين دالة الكثافة الطيفية المقدرة وعلى التوالي لجميع قيم **w** اي لكل تكرارات فورير ضمن الفترة **[2π / N , π]** ولكلا المقدرين المتقدم ذكرهما (الكلاسيكي و**Lomb** في حالة القيم المفقودة) ولجميع التكرارات المستخدمة في التجربة **r=500**. وبذلك فان متوسط دالة الكثافة الطيفية المقدرة لجميع قيم $w_k = (2\pi k)/N \ , \ k = 1,2,\ldots[N/2]$ يكون

$$\hat{P}(w_k) = [\textstyle\sum_{r=1}^{500} \hat{P}_r(w_k)]/500 \qquad \ldots(17)$$

وتباين دالة الكثافة الطيفية المقدرة لجميع قيم $w_k = (2\pi k)/N \ , \ k = 1,2,\ldots[N/2]$ تكون

$$[\hat{P}(w_k)]^2 = (\textstyle\sum_{r=1}^{500} [\hat{P}_r(w_k)]^2)/500 \qquad \ldots(18)$$

وقد اختيرت عدة قيم لـ $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولبعض من قيم **w** لدراسة سلوك دالة الكثافة الطيفية. فضلا عن ايجاد متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ ولجميع قيم **w** والمستخرجة من الصيغة **(17)** وكالاتي

$$\text{Average of } [\hat{P}(w_k)] = (\textstyle\sum_{k=1}^{[N/2]} [\hat{P}(w_k)]/[N/2] \qquad \ldots(19)$$

وايجاد متوسط قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولجميع قيم **w** والمستخرجة من الصيغة **(18)** وكالاتي

$$\text{Average of } [\hat{P}(w_k)]^2 = (\textstyle\sum_{k=1}^{[N/2]} [\hat{P}(w_k)]^2 /[N/2] \qquad \ldots(20)$$

وايجاد مجموع مربعات الخطأ **(SSE)** من خلال ايجاد مجموع قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولجميع قيم **w** و المستخرجة من الصيغة **(18)** ، لدراسة تاثير التوليفات المفترضة في البحث (قيم معلمات أنموذج **AR(2)** وتوزيع حد الخطأ وحجم العينة) على سلوك دالة الكثافة الطيفية. وقد لخصت النتائج مما تقدم ذكره في الجداول **(1-4)** ولغاية **(2-9)** لكل من مخطط الدورية الكلاسيكي و**Lomb** في حالة القيم المفقودة. وكما مبين في المبحث التالي.

4.2: نتائج مخطط الدورية الكلاسيكي في حالة القيم المفقودة: من النتائج المدونة في الجداول (1-4) ولغاية (2-5) وفي حالة اختلاف قيمة المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ، وبالاعتماد على قيم المتوسط والتباين لدالة الكثافة الطيفية المقدرة عند التكرار الاول ($W_1 = 2\pi / N$) اي عند $\hat{P}(w_1)$ و $[\hat{P}(w_1)]^2$ ولحجمي العينتين المفترض في حالة وجود قيم مفقودة (N=80,120)، فضلا عن اعتماد قيم $\hat{P}(w_{(N/2)})$ (اي القيمتين $\hat{P}(w_{40})$ و $\hat{P}(w_{60})$) و $[\hat{P}(w_{(N/2)})]^2$ (اي عند التكرار الاخير ($w_{(N/2)} = \pi$) والتي تمثل القيمتين $[\hat{P}(w_{60})]^2$ و $[\hat{P}(w_{40})]^2$)، وفقا لحجمي العينتين المفترض N=80,120، أذ نلاحظ منها :

1. **تكون قيمة $\hat{P}(w_1)$ متزايدة بزيادة قيمة φ_1 ولحجمي العينتين المفترض(N=80,120)، ولكل التوزيعات المفترضة لحد الخطأ لأنموذج AR(2) أي توزيع $N(0,2)$ و $U(0,1)$ و $Gam(0.5,1)$ و $Exp(0.5)$.**
2. **أما قيمة دالة الكثافة الطيفية المقدرة عند التكرارالاخير $\hat{P}(w_{(N/2)})$ اي قيم $\hat{P}(w_{40})$ و $\hat{P}(w_{60})$ ، تكون**
   - **متناقصة بزيادة قيمة φ_1 ولكلا الحجمين المفترضN=80,120 عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع التوزيع $N(0,2)$ و $Exp(0.5)$.**
   - **متزايدة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتناقصة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة ولكلا الحجمين المفترض N=80,120، عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع $U(0,1)$ ، وكما مبين في الجدول (2-4).**
   - **متزايدة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتناقصة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكونN=80، وتكون متناقصة بزيادة قيمة φ_1 عندما تكون N=120 عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع $Gam(0.5,1)$ ، وكما مبين في الجدول (3-4).**
3. **اما قيمة تباين دالة الكثافة الطيفية عند التكرار الاول ($[\hat{P}(w_1)]^2$) فتكون**
   - **متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايدة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكونN=80 ، ومتزايدة بزيادة قيمة φ_1 عندما تكون N=120 عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ لأنموذج AR(2) يتبع التوزيع $N(0,2)$ ، انظر الجدول (1-4).**
   - **متزايدة بزيادة قيمة φ_1 عندما تكون N=80,120 عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع التوزيع $U(0,1)$ و $Gam(0.5,1)$ و $Exp(0.5)$ ،وكما مبين في الجداول (2-4) الى(4-4).**
4. **اما قيمة تباين دالة الكثافة الطيفية المقدرة عند التكرارالاخير $[\hat{P}(w_{(N/2)})]^2$ عندما تكونN=80,120 اي قيم $[\hat{P}(w_{40})]^2$ و $[\hat{P}(w_{60})]^2$ ،فتكون**
   - **متناقصة بزيادة قيمة φ_1 عندما تكون N=80,120 عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع للتوزيع الطبيعي $N(0,2)$ ،انظرالجدول (1-4).**
   - **متزايدة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتناقصة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكونN=80,120 عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع $U(0,1)$ ،انظرالجدول (2-4).**

- متزايدة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتناقصة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكون **N=80** ، في حين تكون قيمة $[\hat{P}(w_{40})]^2$ متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايدة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع $Gam(0.5,1)$.
- متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة عندما تكون **N=80** ،في حين تكون قيمة $[\hat{P}(w_{60})]^2$ متزايدة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتناقصة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع $Exp(0.5)$.

5. اما تاثير حجمي العينتين المفترض على قيمة $\hat{P}(w_1)$ و $\hat{P}(w_{(N/2)})$ اي قيم $\hat{P}(w_{40})$ و $\hat{P}(w_{60})$ ، فنلاحظ أن

- تزداد قيمة $\hat{P}(w_1)$ بزيادة حجم العينة ولكل التوزيعات المفترضة لحد الخطأ ولكل نماذج **AR(2)** المفترضة في البحث.
- تزداد قيمة $\hat{P}(w_{(N/2)})$ بزيادة حجم العينة ولكل نماذج **AR(2)** المفترضة في البحث عدا الأنموذج الاول عندما تكون $(\varphi_1 = -0.8, \varphi_2 = 0.1)$ ،عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع $N(0,2)$ و $U(0,1)$ و $Exp(0.5)$.
- تزداد قيمة $\hat{P}(w_{(N/2)})$ بزيادة حجم العينة ولكل قيم φ_1 السالبة، في حين تتناقص قيمة $\hat{P}(w_{(N/2)})$ بزيادة حجم العينة ولكل قيم φ_1 الموجبة عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع $Gam(0.5,1)$.

جدول (4-1) يبين قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لمخطط الدورية الكلاسيكي عند قيم معينة لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$،عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الطبيعي N(0,2) وبحجمي العينتين المفترض.

w_k	حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.16966	0.58467	0.33927	0.22240	6.09170	85.1930	6.78500	107.120
w_{10}	0.10194	0.02050	0.13842	0.03895	0.49292	0.49207	0.75483	1.15690
w_{20}	0.13492	0.03613	0.10567	0.02308	0.22638	0.10380	0.28273	0.15938
w_{30}	0.37269	0.29001	0.28185	0.13021	0.25537	0.15031	0.20971	0.08291
w_{40}	2.58030	21.8400	2.29140	17.8570	0.34350	0.33975	0.16325	0.07189
w_k	حجم العينة T=150 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=120)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.21263	0.07584	0.42059	0.30032	7.64920	115.750	7.93500	135.270
w_{10}	0.09352	0.01736	0.15344	0.04929	0.92342	1.65930	1.37820	4.64950
w_{20}	0.10729	0.02303	0.11472	0.02646	0.31530	0.20541	0.50888	0.50217
w_{30}	0.12490	0.02920	0.10718	0.02567	0.21494	0.09217	0.28781	0.18155
w_{40}	0.24299	0.11824	0.15928	0.05160	0.23324	0.11599	0.20213	0.07927
w_{50}	0.73759	1.18290	0.46863	0.43222	0.28590	0.16491	0.17822	0.06721
w_{60}	2.48640	19.5850	2.37200	16.0670	0.37117	0.41774	0.18608	0.10256

جدول (4-2) يبين قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لمخطط الدورية الكلاسيكي عند قيم معينة لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$، عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع المنتظم U(0,1) وبحجمي العينتين المفترض.

w_k	حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.03379	0.00156	0.06803	0.00653	1.37470	3.61470	1.49600	5.05620
w_{10}	0.00676	0.00009	0.01014	0.00021	0.11308	0.02544	0.16606	0.05123
w_{20}	0.00877	0.00015	0.00852	0.00014	0.04548	0.00384	0.05803	0.00655
w_{30}	0.02290	0.00099	0.01863	0.00064	0.05362	0.00566	0.04484	0.00394
w_{40}	0.17413	0.09149	0.18121	0.10309	0.06825	0.01602	0.03641	0.00414
w_k	حجم العينة T=150 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=120)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.04706	0.00278	0.09681	0.01201	1.84930	6.39450	2.17090	8.66220
w_{10}	0.00663	0.00009	0.01191	0.00029	0.19173	0.07306	0.30569	0.19634
w_{20}	0.00694	0.00008	0.00904	0.00016	0.06482	0.00834	0.10844	0.02229
w_{30}	0.00888	0.00016	0.00873	0.00016	0.04831	0.00451	0.06448	0.00786
w_{40}	0.01523	0.00045	0.01182	0.00026	0.04823	0.00469	0.04578	0.00404
w_{50}	0.04334	0.00374	0.03110	0.00201	0.06260	0.00807	0.04235	0.00352
w_{60}	0.15813	0.07786	0.20166	0.13832	0.07970	0.01844	0.03915	0.00495

جدول (4-3) يبين قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لمخطط الدورية الكلاسيكي عند قيم معينة لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$، عندما يكون حد الخطاء يتبع توزيع كاما Gam(0.5,1) وبحجمي العينتين المفترض.

w_k	حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.01264	0.00026	0.02521	0.00104	0.50987	0.53001	0.57033	0.65913
w_{10}	0.00492	0.00005	0.00705	0.00010	0.03710	0.00245	0.06523	0.00787
w_{20}	0.00656	0.00009	0.00573	0.00007	0.01729	0.00058	0.02261	0.00098
w_{30}	0.01663	0.00054	0.01163	0.00264	0.01960	0.00071	0.01585	0.00047
w_{40}	0.10972	0.03290	0.11414	0.03805	0.02618	0.00226	0.01394	0.00057
w_k	حجم العينة T=150 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=120)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.01673	0.00044	0.03240	0.00170	0.60268	0.73639	0.62910	0.77076
w_{10}	0.00454	0.00004	0.00757	0.00011	0.06714	0.00899	0.10836	0.02338
w_{20}	0.00532	0.00006	0.00543	0.00006	0.02498	0.00121	0.03933	0.00295
w_{30}	0.00681	0.00009	0.00578	0.00006	0.01671	0.00051	0.02381	0.00104
w_{40}	0.01252	0.00032	0.00822	0.00013	0.01665	0.00056	0.01590	0.00049
w_{50}	0.03560	0.00247	0.02364	0.00116	0.02324	0.00109	0.01510	0.00478
w_{60}	0.12664	0.04818	0.11909	0.04621	0.02241	0.00016	0.01293	0.00468

جدول (4-4) يبين قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لمخطط الدورية الكلاسيكي عند قيم معينة لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$، عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الاسي Exp(0.5) وبحجمي العينتين المفترض.

w_k	حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.02012	0.00058	0.03943	0.00236	0.85821	1.57730	0.96864	1.87480
w_{10}	0.00548	0.00006	0.00803	0.00013	0.06366	0.00814	0.10106	0.01869
w_{20}	0.00723	0.00010	0.00679	0.00009	0.02834	0.00160	0.03371	0.00207
w_{30}	0.01849	0.00870	0.01413	0.00042	0.03104	0.00215	0.02483	0.00122
w_{40}	0.13779	0.06614	0.12240	0.04488	0.04098	0.00495	0.02228	0.00160
w_k	حجم العينة T=150 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=120)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.02814	0.00106	0.05568	0.00426	1.09470	2.28360	1.29190	3.32720
w_{10}	0.00527	0.00006	0.00885	0.00015	0.12045	0.02801	0.17897	0.06812
w_{20}	0.00572	0.00007	0.00680	0.00009	0.03773	0.00288	0.06052	0.00711
w_{30}	0.00796	0.00014	0.00659	0.00008	0.02599	0.00130	0.03897	0.00288
w_{40}	0.01286	0.00032	0.00929	0.00016	0.02655	0.00143	0.02595	0.00136
w_{50}	0.03600	0.00260	0.02475	0.00117	0.03646	0.00260	0.02226	0.00104
w_{60}	0.13231	0.04806	0.12703	0.05798	0.04505	0.00582	0.02669	0.00198

6. اما متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ ولجميع قيم w (Average of $[\hat{P}(w_k)]$) والمحتسبة وفق الصيغة (19)، ومتوسط قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولجميع قيم w (Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$) والمحتسبة وفق الصيغة (20)، وقيمة مجموع مربعات الخطأ (SSE) المحتسبة من خلال ايجاد مجموع قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولجميع قيم w والمستخرجة وفق الصيغة (18)، والمبينة في الجداول (1-5) الى (4-5)، فنلاحظ بأنها تكون

- متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايدة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما يكون حجم العينة N=80,120، عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع N(0,2) و Gam(0.5,1) و Exp(0.5).
- متزايدة بزيادة قيمة φ_1 عندما يكون حجم العينة N=80,120، عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع U(0,1).

7. اما تاثير حجمي العينتين المفترض على قيمة (Average of $[\hat{P}(w_k)]$) وقيمة (Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$) المبينة في الجداول (1-5) الى (4-5)، فنلاحظ وبصورة عامة بانها

- تتناقص بزيادة حجم العينة ولكل قيم φ_1 السالبة. في حين تزداد بزيادة حجم العينة ولكل قيم φ_1 الموجبة، عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع N(0,2) و Exp(0.5).
- تزداد بزيادة حجم العينة ولكل قيم φ_1 ولكل نماذج AR(2) المفترضة في البحث عدا الأنموذج الاول عندما تكون $(\varphi_1=-0.8, \varphi_2=0.1)$، عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع U(0,1).

- تزداد قيمة (Average of [$\hat{P}(w_k)$]) بزيادة حجم العينة ولكل قيم φ_1 ولكل نماذج AR(2) المفترضة في البحث عدا الأنموذج الثاني عندما تكون ($\varphi_1 = -0.5, \varphi_2 = 0.4$) ، في حين تزداد قيمة (Average of [$\hat{P}(w_k)$]^2) بزيادة حجم العينة ولكل نماذج AR(2) ،عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع Gam(0.5,1) .

8. ان قيمة مجموع مربعات الخطأ (SSE) تزداد بزياد حجم العينة ولكل نماذج AR(2) المفترضة في البحث، ولكل التوزيعات المفترضة لحد الخطأ.

جدول (5-1) يبين متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ و SSE [3] لمخطط الدورية الكلاسيكي لتكرارات فورير ضمن الفترة [$2\pi/N, \pi$]،عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الطبيعي N(0,2) وبحجمي العينتين المفترض.

The proposed value (N=80)	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$	0.44515	0.38000	0.71210	0.85901
Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$	1.47790	1.12130	4.12130	5.75850
SSE	59.1170	44.8501	164.853	230.347
The proposed value (N=120)	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$	0.43322	0.37642	0.73931	0.89662
Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$	1.26160	1.01310	4.45950	6.35430
SSE	75.6960	60.7880	267.570	381.260

جدول (5-2) يبين متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ و SSE لمخطط الدورية الكلاسيكي لتكرارات فوريرضمن الفترة [$2\pi/N, \pi$]،عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع المنتظم U(0,1) وبحجمي العينتين المفترض.

The proposed value (N=80)	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$	0.02949	0.03038	0.15389	0.18750
Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$	0.00582	0.00605	0.17855	0.27130
SSE	0.23269	0.24189	7.14200	10.8522
The proposed value (N=120)	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$	0.02923	0.03058	0.16523	0.20478
Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$	0.00547	0.00652	0.24014	0.35125
SSE	0.32819	0.39096	14.4080	21.0750

[3] ان مجموع مربعات الخطاء (SSE) يمثل مجموع قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولكل قيم w .

جدول (5-3) يبين متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ و SSE لمخطط الدورية الكلاسيكي لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$،عندما يكون حد الخطاء يتبع توزيع كاما Gam(0.5,1) وبحجمي العينتين المفترض.

The proposed value (N=80)	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$	0.02167	0.01958	0.05523	0.06795
Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$	0.00305	0.00253	0.02436	0.03576
SSE	0.12183	0.10115	0.97451	1.43030
The proposed value (N=120)	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$	0.02175	0.01941	0.05652	0.06881
Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$	0.00321	0.00266	0.02741	0.03593
SSE	0.19260	0.15967	1.64460	2.15590

جدول (5-4) يبين متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ وSSE لمخطط الدورية الكلاسيكي لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$ ،عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الاسي Exp(0.5) وبحجمي العينتين المفترض.

The proposed value (N=80)	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$	0.02424	0.02256	0.09151	0.11140
Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$	0.00419	0.00318	0.06904	0.09610
SSE	0.16763	0.12738	2.76170	3.84410
The proposed value (N=120)	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$	0.02329	0.02202	0.09762	0.11824
Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$	0.00340	0.00318	0.08443	0.12014
SSE	0.20411	0.19071	5.06590	7.20820

ولدراسة تاثير الدالة الاحتمالية المفترضة لحد الخطأ لأنموذج AR(2) على مقدرات مخطط الدورية الكلاسيكي، فقد تم افتراض عدة توزيعات منها التوزيع الطبيعي وكاما والاسي بمعلمات معينة ،بحيث تعطي متوسط وتباين متساوي لكل التوزيعات المفترضة (التوزيع الطبيعي وكاما والاسي) لحد الخطأ،والمبينة في الجدول(3) عندما تكون N=80..فقد تم تنفيذ تلك التجارب لمخطط الدورية الكلاسيكي في حالة القيم المفقودة،وقد دونة النتائج في الجزء الاول من الجدولين (4-4) و(5-4) وكذلك الجداولين(6-1) و(6-2)، ولحجم العينة N=80، واعتمادا على قيم $\hat{P}(w_1)$ و $[\hat{P}(w_1)]^2$، فضلا عن اعتماد قيم $\hat{P}(w_{(N/2)})$ و $[\hat{P}(w_{(N/2)})]^2$. فقد تم الحصول على نتائج مماثلة لما تقدم ذكره في حالة اختلاف المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ لأنموذج AR(2) وكما مبين في الجداول المتقدم ذكرها.

اما متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ ولجميع قيم w (Average of [$\hat{P}(w_k)$]) والمحتسبة وفق الصيغة (19)، ومتوسط قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولجميع قيم w (Average of [$\hat{P}(w_k)$]^2) والمحتسبة وفق الصيغة (20)، وقيمة مجموع مربعات الخطأ (SSE) المحتسبة من خلال ايجاد مجموع قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولجميع قيم w والمستخرجة وفق الصيغة (18)، والمبينة في الجدولين (4-5) و(6-2) ، فنلاحظ منها بان تلك القيم عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع $N(.5,.25)$ تكون أكبر مقارنة بنفس القيم المتقدم ذكرها عندما يكون التوزيعين المفترضين لحد الخطأ يتبع $Exp(0.5)$ و $Gam(1,0.5)$.

نستنتج مما تقدم ذكره وبصورة عامة ولكل نماذج AR(2) المفترضة في البحث، في حالة اختلاف اوتساوي قيمة المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ، ولكلا الحجمين المفترض في حالة القيم المفقودة بان قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ تزداد عند تكرارات فوريرالعالية ولجميع قيم φ_1 السالبة وبذلك يمثل رسم تلك القيم مقابل تكرارات فوريرشكل منحني ملتوي الى جهة اليمين.في حين يحدث العكس منه تماما،أذ تزداد قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ عند تكرارات فوريرالمنخفضة ولجميع قيم φ_1 الموجبة،ليمثل شكل منحني ملتوي الى جهة اليسار.على سبيل المثال أنظرالاشكال البيانية (1-a,b,c,d) و(2-a,b,c,d) و(3-a,b,c,d) في الملحق.

جدول (6-1) يبين قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لمخطط الدورية الكلاسيكي عند قيم معينة لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$،عندما يكون حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80) .

w_k	عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الطبيعي N(0.5,0.25)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.02244	0.00093	0.04986	0.00489	0.82231	1.39550	0.96631	2.05180
w_{10}	0.01430	0.00041	0.01710	0.00056	0.07276	0.01042	0.11349	0.02761
w_{20}	0.01798	0.00068	0.01333	0.00035	0.03107	0.00189	0.04148	0.00351
w_{30}	0.04719	0.00414	0.03104	0.00196	0.03741	0.00278	0.02683	0.00143
w_{40}	0.31015	0.32011	0.30322	0.28563	0.04948	0.00697	0.02698	0.00227
	عندما يكون حد الخطاء يتبع توزيع كاما Gam (1,0.5)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
w_k	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.01936	0.00053	0.04167	0.00258	0.75433	1.06410	0.93446	1.74980
w_{10}	0.00593	$7.0020e^{-5}$	0.00787	0.00012	0.06363	0.00820	0.09672	0.01765
w_{20}	0.00755	0.00011	0.00616	$7.6566e^{-5}$	0.02719	0.00138	0.03688	0.00266
w_{30}	0.01979	0.00078	0.01434	0.00043	0.02992	0.00174	0.02680	0.00132
w_{40}	0.11384	0.03945	0.15204	0.06583	0.04193	0.00460	0.02369	0.00159

جدول (6-2) يبين متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ و SSE لمخطط الدورية الكلاسيكي لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$، عندما يكون حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80) .

The proposed value	عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الطبيعي N(0.5,0.25)			
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.05800 0.02403 0.96116	0.04897 0.01688 0.67535	0.10103 0.07257 2.90300	0.12575 0.11670 4.66800
The proposed value	عندما يكون حد الخطاء يتبع توزيع كاما Gam (1,0.5)			
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.02346 0.00358 0.14301	0.02324 0.00366 0.14623	0.08937 0.05855 2.34190	0.11289 0.09715 3.88600

4.3: نتائج مخطط الدورية Lomb: من النتائج المدونة في الجداول (1-7) ولغاية (4-8) وفي حالة اختلاف قيمة المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ، وبالاعتماد على قيم المتوسط والتباين لدالة الكثافة الطيفية المقدرة عند التكرار الاول $(W_1 = 2\pi / N)$ اي عند $\hat{P}(w_1)$ و $[\hat{P}(w_1)]^2$ ولحجمي العينتين المفترض في حالة وجود قيم مفقودة (N=80,120)، فضلا عن اعتماد قيم $\hat{P}(w_{(N/2)})$ و $[\hat{P}(w_{(N/2)})]^2$ (اي عند التكرار الاخير $(W_{(N/2)} = \pi)$ والتي تمثل (اي القيمتين $\hat{P}(w_{40})$ و $\hat{P}(w_{60})$ القيمتين $[\hat{P}(w_{40})]^2$ و $[\hat{P}(w_{60})]^2$)، أذ نلاحظ منها :

1. تكون قيمة $\hat{P}(w_1)$ متزايدة بزيادة قيمة φ_1 ولحجمي العينتين المفترض (N=80,120)، ولكل التوزيعات المفترضة لحد الخطأ ($N(0,2)$ و $U(0,1)$ و $Gam(0.5,1)$ و $Exp(0.5)$).
2. اما قيمة دالة الكثافة الطيفية المقدرة عند التكرار الاخير $\hat{P}(w_{(N/2)})$ فتكون
   - متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايدة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكون N=80.في حين تكون متناقصة بزيادة قيمة φ_1 عندما تكون N=120، عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع التوزيع $N(0,2)$.
   - متزايدة بزيادة قيمة φ_1 عندما تكون N=80 ، وتكون متزايدة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتناقصة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكون N=120، عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع التوزيع $U(0,1)$.

- متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايدة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة، عندما تكون حجم **N=80**. في حين تكون متزايدة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتناقصة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكون **N=120**،عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع $Gam(0.5,1)$.
- متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايدة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكون حجم **N=80**.في حين تكون متناقصة بزيادة قيمة φ_1 عندما تكون **N=120**،عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع التوزيع $Exp(0.5)$.

3. اما قيمة تباين دالة الكثافة الطيفية عند التكرار الاول($[\hat{P}(w_1)]^2$)فتكون متزايدة بزيادة قيمة φ_1 عندما تكون **N=80,120** لكل التوزيعات المفترضة لحد الخطأ (التوزيع $N(0,2)$ و $U(0,1)$ و $Gam(0.5,1)$ و $Exp(0.5)$).
4. اما قيمة تباين دالة الكثافة الطيفية المقدرة عند التكرار الاخير $[\hat{P}(w_{(N/2)})]^2$ عندما تكون **N=80,120** ،

- تكون متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايدة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكون **N=80** ، في حين تكون $[\hat{P}(w_{60})]^2$ متناقصة بزيادة قيمة φ_1 عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع التوزيع $N(0,2)$ و $Gam(0.5,1)$.
- متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايدة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكون **N=80** ، في حين تكون
متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايدة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكون **N=80** ، في حين تكون $[\hat{P}(w_{60})]^2$ متزايدة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتناقصة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع التوزيع $U(0,1)$.
- متناقصة بزيادة قيمة φ_1 عندما تكون **N=80** و**N=12** ،وعندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع التوزيع $Exp(0.5)$.

5. اما تاثيرحجمي العينتين المفترض على قيمة $\hat{P}(w_1)$ و $\hat{P}(w_{(N/2)})$ نلاحظ ماياتي

- تكون قيمة $\hat{P}(w_1)$ عندما تكون **N=80** اكبرمقارنة بقيمة $\hat{P}(w_1)$ عندما تكون **N=120** ولكل توزيعات حد الخطأ ولكل نماذج **AR(2)** المفترضة في البحث .
- تكون قيمة $\hat{P}(w_{40})$ اكبرمقارنة بقيمة $\hat{P}(w_{60})$ ولكل نماذج **AR(2)** ولكل توزيعات حد الخطأ المفترضة في البحث.

جدول (7-1) يبين قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لمخطط الدورية Lomb عند قيم معينة لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$، عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الطبيعي N(0,2) وبحجمي العينتين المفترض.

w_k	حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80)							
	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$		$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$	
	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$
w_1	0.00384	0.00003	0.00804	0.00012	0.14439	0.04560	0.15452	0.05097
w_{10}	0.00224	0.00001	0.00346	0.00002	0.01173	0.00028	0.01859	0.00063
w_{20}	0.00337	0.00002	0.00265	0.00001	0.00546	0.00006	0.00799	0.00013
w_{30}	0.01023	0.00022	0.00628	0.00008	0.00665	0.00008	0.00488	0.00004
w_{40}	0.04388	0.00504	0.03855	0.00420	0.01584	0.00061	0.01610	0.00072
w_k	حجم العينة T=150 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=120)							
	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$		$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$	
	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$
w_1	0.00332	$1.8094e^{-5}$	0.00590	$5.7821e^{-5}$	0.10962	0.02340	0.12219	0.02858
w_{10}	0.00156	$4.8596e^{-6}$	0.00241	$1.1496e^{-5}$	0.01595	0.00052	0.02512	0.00129
w_{20}	0.00179	$6.405e^{-6}$	0.00202	$8.5231e^{-6}$	0.00544	$5.6616e^{-5}$	0.00898	0.00016
w_{30}	0.00209	$8.1633e^{-6}$	0.00176	$6.2862e^{-6}$	0.00347	$2.3810e^{-5}$	0.00482	$4.8995e^{-5}$
w_{40}	0.00405	$3.2863e^{-5}$	0.00286	$1.5896e^{-5}$	0.00353	$2.5080e^{-5}$	0.00359	$2.3993e^{-5}$
w_{50}	0.01230	0.00033	0.00732	0.00010	0.00521	$5.5200e^{-5}$	0.00309	$1.9228e^{-5}$
w_{60}	0.03447	0.00276	0.03148	0.00207	0.00868	0.00017	0.00750	0.00015

جدول (7-2) يبين قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لمخطط الدورية Lomb عند قيم معينة لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$، عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع المنتظم U(0,1) وبحجمي العينتين المفترض.

w_k	حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80)							
	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$		$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$	
	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$
w_1	0.00075	$7.6489e^{-7}$	0.00155	$3.3712e^{-6}$	0.03288	0.00207	0.04049	0.00326
w_{10}	0.00017	$5.4347e^{-8}$	0.00025	$1.3122e^{-7}$	0.00283	$1.5886e^{-5}$	0.00432	$3.5959e^{-5}$
w_{20}	0.00022	$9.2105e^{-8}$	0.00021	$9.0969e^{-8}$	0.00114	$2.437e^{-6}$	0.00146	$3.8911e^{-6}$
w_{30}	0.00060	$7.4290e^{-7}$	0.00047	$4.0601e^{-7}$	0.00135	$3.6233e^{-6}$	0.00107	$2.1985e^{-6}$
w_{40}	0.00280	$2.5200e^{-5}$	0.00295	$2.2206e^{-5}$	0.00327	$2.5310e^{-5}$	0.00334	$3.1959e^{-5}$
w_k	حجم العينة T=150 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=120)							
	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$		$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$	
	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$
w_1	0.00071	$6.1641e^{-7}$	0.00146	$2.7145e^{-6}$	0.03091	0.00169	0.03150	0.00188
w_{10}	0.00011	$2.3334e^{-8}$	0.00021	$8.0996e^{-8}$	0.00323	$2.2067e^{-5}$	0.00501	$4.8416e^{-5}$
w_{20}	0.00012	$2.6613e^{-8}$	0.00015	$4.3569e^{-8}$	0.00116	$2.5853e^{-6}$	0.00177	$6.0690e^{-6}$
w_{30}	0.00016	$5.0769e^{-8}$	0.00013	$3.5670e^{-8}$	0.00084	$1.3518e^{-6}$	0.00103	$2.1633e^{-6}$
w_{40}	0.00025	$1.1637e^{-7}$	0.00020	$7.9239e^{-8}$	0.00080	$1.2670e^{-6}$	0.00076	$1.0809e^{-6}$
w_{50}	0.00074	$1.1039e^{-6}$	0.00058	$6.8942e^{-7}$	0.00106	$2.2126e^{-6}$	0.00067	$8.3753e^{-7}$
w_{60}	0.00236	$1.1403e^{-5}$	0.00249	$1.2872e^{-5}$	0.00225	$1.0295e^{-5}$	0.00161	$5.9774e^{-6}$

جدول (7-3) يبين قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لمخطط الدورية Lomb عند قيم معينة لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$، عندما يكون حد الخطاء يتبع توزيع كاما Gam(0.5,1) وبحجمي العينتين المفترض.

w_k	حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$
w_1	0.00029	$1.3631e^{-7}$	0.00055	$5.0155e^{-7}$	0.01103	0.00027	0.01364	0.00037
w_{10}	0.00012	$2.8279e^{-8}$	0.00016	$5.2954e^{-8}$	0.00088	$1.6861e^{-6}$	0.00163	$4.9085e^{-6}$
w_{20}	0.00016	$5.8607e^{-8}$	0.00015	$4.3173e^{-8}$	0.00046	$4.4038e^{-7}$	0.00057	$6.2386e^{-7}$
w_{30}	0.00047	$4.4836e^{-7}$	0.00029	$1.6410e^{-7}$	0.00047	$4.5609e^{-7}$	0.00040	$3.0564e^{-7}$
w_{40}	0.00201	$9.6996e^{-6}$	0.00192	$8.1852e^{-6}$	0.00114	$2.9502e^{-6}$	0.00121	$3.7713e^{-6}$
w_k	حجم العينة T=150 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=120)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$
w_1	0.00024	$8.1870e^{-8}$	0.00049	$3.7243e^{-7}$	0.01018	0.00019	0.01023	0.00019
w_{10}	$7.8035e^{-5}$	$1.2946e^{-8}$	0.00014	$3.9060e^{-8}$	0.00121	$3.0108e^{-6}$	0.00182	$6.2853e^{-6}$
w_{20}	$8.8563e^{-5}$	$1.7144e^{-8}$	$9.2617e^{-5}$	$1.7585e^{-8}$	0.00042	$3.6289e^{-7}$	0.00064	$8.0158e^{-7}$
w_{30}	0.00011	$2.3652e^{-8}$	$9.8978e^{-5}$	$1.8747e^{-8}$	0.00028	$1.6653e^{-7}$	0.00040	$2.9767e^{-7}$
w_{40}	0.00021	$8.4284e^{-8}$	0.00013	$3.8388e^{-8}$	0.00029	$1.6491e^{-7}$	0.00028	$1.4211e^{-7}$
w_{50}	0.00056	$6.7233e^{-7}$	0.00036	$2.6421e^{-7}$	0.00037	$2.6612e^{-7}$	0.00026	$1.3222e^{-7}$
w_{60}	0.00162	$6.1982e^{-5}$	0.00168	$5.9486e^{-6}$	0.00070	$9.3861e^{-7}$	0.00058	$7.4320e^{-7}$

جدول (7-4) يبين قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لمخطط الدورية Lomb عند قيم معينة لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$، عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الاسي Exp(0.5) وبحجمي العينتين المفترض.

w_k	حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$
w_1	0.00047	$3.1323e^{-7}$	0.00093	$1.1876e^{-6}$	0.01967	0.00074	0.02445	0.00120
w_{10}	0.00015	$4.2276e^{-8}$	0.00022	$9.3463e^{-8}$	0.00151	$4.4172e^{-6}$	0.00244	$1.1711e^{-5}$
w_{20}	0.00019	$7.198\ e^{-8}$	0.00016	$4.8891e^{-8}$	0.00071	$1.0183e^{-6}$	0.00089	$1.5475e^{-6}$
w_{30}	0.00051	$5.0115e^{-7}$	0.00037	$2.8041e^{-7}$	0.00083	$1.3015e^{-6}$	0.00068	$9.0242e^{-7}$
w_{40}	0.00226	$1.2237e^{-5}$	0.00194	$1.0429e^{-5}$	0.00195	$8.7576e^{-6}$	0.00208	$1.4830e^{-6}$
w_k	حجم العينة T=150 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=120)							
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$		$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$		$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$	
	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$	$P(w_k)$	$[P(w_k)]^2$
w_1	0.00041	$2.2645e^{-7}$	0.00084	$9.6862e^{-7}$	0.01704	0.00054	0.02027	0.00077
w_{10}	$9.7540e^{-5}$	$1.7372e^{-8}$	0.00015	$4.7383e^{-8}$	0.00193	$7.1230e^{-6}$	0.00298	$1.7816e^{-5}$
w_{20}	$8.8615e^{-5}$	$1.5346e^{-8}$	0.00012	$2.5753e^{-8}$	0.00066	$8.2993e^{-7}$	0.00103	$2.0535e^{-6}$
w_{30}	0.00012	$2.9804e^{-8}$	0.00011	$2.5795e^{-8}$	0.00047	$4.6014e^{-7}$	0.00058	$6.5315e^{-7}$
w_{40}	0.00021	$9.1471e^{-8}$	0.00015	$4.7619e^{-8}$	0.00044	$3.9536e^{-7}$	0.00045	$3.9380e^{-7}$
w_{50}	0.00065	$7.6543e^{-7}$	0.00045	$3.9321e^{-7}$	0.00056	$5.8552e^{-7}$	0.00041	$3.4008e^{-7}$
w_{60}	0.00202	$9.5205e^{-6}$	0.00191	$7.1959e^{-6}$	0.00113	$2.6067e^{-6}$	0.00103	$2.3863e^{-6}$

6. اما متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ ولجميع قيم w (Average of [$\hat{P}(w_k)$]) والمحتسبة وفق الصيغة (19)، ومتوسط قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولجميع قيم w (Average of [$\hat{P}(w_k)$]^2) والمحتسبة وفق الصيغة (20) وقيمة مجموع مربعات الخطأ (SSE) المحتسبة من خلال ايجاد مجموع قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولجميع قيم w والمستخرجة وفق الصيغة (18)، والمبينة في الجداول (1-8) الى (4-8)، فتكون متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايدة بزيادة قيمة φ_1 الموجبة ولكلا الحجمين من العينات، عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع التوزيعات N(0,2) و Exp(0.5) و Gam(0.5,1).

7. اما عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطأ يتبع توزيع U(0,1)، فان متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ تكون متساوية بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايد بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكون N=80، في حين تكون متزايدة بزيادة قيمة φ_1 عندما تكون N=120. وان متوسط قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ و SSE تكون متناقصة بزيادة قيمة φ_1 السالبة ومتزايد بزيادة قيمة φ_1 الموجبة عندما تكون N=80، في حين يكون متزايدة بزيادة قيمة φ_1 عندما تكون N=120 .

جدول (1-8) يبين متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ و SSE لمخطط الدورية Lomb لتكرارات فورير ضمن الفترة [2π /N, π]، عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الطبيعي N(0, 2) وبحجمي العينتين المفترض.

The proposed value (N=80)	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$	$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.01075 0.00072 0.02892	0.00899 0.00051 0.02059	0.01738 0.00223 0.08916	0.02130 0.00315 0.12601
The proposed value (N=120)	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$	$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.00708 0.00030 0.01809	0.00608 0.00022 0.01344	0.01206 0.00105 0.06302	0.01452 0.00152 0.09135

جدول (2-8) يبين متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ و SSE لمخطط الدورية Lomb لتكرارات فورير ضمن الفترة [2π /N, π]، عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع المنتظم U(0,1) وبحجمي العينتين المفترض.

The proposed value (N=80)	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$	$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.00072 $2.9691e^{-6}$ 0.00012	0.00072 $2.6598e^{-6}$ 0.00011	0.00386 0.00011 0.00430	0.00492 0.00019 0.00746
The proposed value (N=120)	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$	$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.00047 $1.2385e^{-6}$ $7.4321e^{-5}$	0.00049 $1.3323e^{-6}$ $7.9938e^{-5}$	0.00279 $6.4671e^{-5}$ 0.00388	0.00331 $8.3924e^{-5}$ 0.00504

جدول (3-8) يبين متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ و SSE لمخطط الدورية Lomb لتكرارات فورير ضمن الفترة [2π /N, π]، عندما يكون حد الخطاء يتبع توزيع كاما Gam(0.5,1) وبحجمي العينتين المفترض.

The proposed value (N=80)	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$	$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.00052 $1.6430e^{-6}$ $6.5721e^{-5}$	0.00046 $1.1696e^{-6}$ $4.6784e^{-5}$	0.00133 $1.3164e^{-5}$ 0.00053	0.00171 $2.1323e^{-5}$ 0.00085
The proposed value (N=120)	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$	$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.00035 $7.1755e^{-7}$ $4.3053e^{-5}$	0.00032 $6.3756e^{-7}$ $3.8254e^{-5}$	0.00096 $7.3815e^{-6}$ 0.00044	0.00116 $9.7749e^{-6}$ 0.00059

جدول (4-8) يبين متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ و SSE لمخطط الدورية Lomb لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$ ،عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الاسي Exp(0.5) وبحجمي العينتين المفترض.

The proposed value (N=80)	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$	$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.00057 $1.8181e^{-6}$ $7.2726e^{-5}$	0.00053 $1.5824e^{-6}$ $6.3295e^{-5}$	0.00229 $3.8049e^{-5}$ 0.00152	0.00290 $6.3946e^{-5}$ 0.00256
The proposed value (N=120)	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$	$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$	$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.00039 $9.1301e^{-7}$ $5.4781e^{-5}$	0.00037 $7.8865e^{-7}$ $4.7319e^{-5}$	0.00016 $2.1082e^{-5}$ 0.00126	0.00020 $3.0759e^{-5}$ 0.00185

ولدراسة تاثير الدالة الاحتمالية المفترضة لحد الخطأ لأنموذج AR(2) على مقدرات مخطط الدورية Lomb، فقد تم افتراض عدة توزيعات منها التوزيع الطبيعي وكاما والاسي بمعلمات معينة، بحيث تعطي متوسط وتباين متساوي لكل التوزيعات المفترضة الحد الخطأ (التوزيع الطبيعي وكاما والاسي)، والمبينة في الجدول(3).فقد تم تنفيذ تلك التجارب لمخطط الدورية Lomb ، وقد دونة النتائج في الجزء الاول من الجدولين (4-7) و(4-8)وكذلك الجدولين (9-1) الى (9-2)، ولحجم العينة N=80،واعتمادا على قيم $\hat{P}(w_1)$ و $[\hat{P}(w_1)]^2$ ،فضلاعن اعتماد قيم $\hat{P}(w_{(N/2)})$ و $[\hat{P}(w_{(N/2)})]^2$.فقد تم الحصول على نتائج مماثلة لما تقدم ذكره في حالة اختلاف المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ وكما مبين في الجداول المتقدم ذكرها.

اما متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ والمحتسبة وفق الصيغة (19)،و متوسط قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ والمحتسبة وفق الصيغة (20)،وقيمة مجموع مربعات الخطأ (SSE) المحتسبة من خلال ايجاد مجموع قيم $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولجميع قيم w والمستخرجة وفق الصيغة (18) والمدونة في الجزء الاول من الجدولين(7-4) و(8-4) والجدولين (9-1) و (9-2)،فنلاحظ منها بان متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ و SSE عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطا يتبع التوزيع $N(.5,.25)$ اكبر مقارنة بنفس القيم عندما يكون التوزيع المفترض لحد الخطا يتبع التوزيعين $Exp(0.5)$ و $Gam(1,0.5)$. كما هو الحال باستخدام مخطط الدورية الكلاسيكي ،في حالة تساوي المتوسط والتباين للتوزيعات المفترضة لحد الخطأ.

وبالنظر الى النتائج المدونة في الجداول (7-1) ولغاية (9-2) يمكن الاستنتاج بان رسم قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ مقابل تكرارات فوريريكون شكل منحني ملتوي الى جهة اليمين ذو قمة مدببة ولجميع قيم φ_1 السالبة، في حين رسم تلك القيم ولجميع قيم φ_1 الموجبة يمثل شكل منحني ملتوي الى جهة اليسار، اذ تستدق تلك القيم بصورة محاذية لمحورx ، على سبيل المثال أنظر الاشكال البيانية (4-a,b,c,d)و(5-a,b,c,d) و(6-a,b,c,d) في الملحق.

وان قيم تباين دالة الكثافة الطيفية ($[\hat{P}(w_k)]^2$) تكون اصغرمن قيم المتوسط لدالة الكثافة الطيفية ($\hat{P}(w_k)$) باستخدام مخطط الدورية Lomb، في حين تكون قيمة التباين $[\hat{P}(w_k)]^2$ اكبرمن قيمة المتوسط ($\hat{P}(w_k)$) باستخدام مخطط الدورية الكلاسيكي ،ولكلا الحجمين المفترض في البحث.

جدول (9-1) يبين قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ لمخطط الدورية Lomb عند قيم معينة لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$ ،عندما يكون حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80) .

w_k	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$		$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$	
	عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الطبيعي N(0.5,0.25)							
w_k	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.00059	$6.7581e^{-7}$	0.00109	$2.0417e^{-7}$	0.02023	0.00087	0.02273	0.00104
w_{10}	0.00033	$2.0990e^{-7}$	0.00044	$3.7666e^{-7}$	0.00179	$7.0682e^{-6}$	0.00251	$1.2169e^{-5}$
w_{20}	0.00041	$3.4107e^{-7}$	0.00035	$2.4654e^{-7}$	0.00079	$1.2569e^{-6}$	0.00108	$2.3814e^{-6}$
w_{30}	0.00122	$2.9445e^{-6}$	0.00081	$1.2849e^{-6}$	0.00084	$1.4276e^{-6}$	0.00076	$1.1819e^{-6}$
w_{40}	0.00533	$7.2064e^{-5}$	0.00508	$6.6802e^{-5}$	0.00226	$1.3386e^{-5}$	0.00250	$1.5264e^{-5}$
	عندما يكون حد الخطاء يتبع توزيع كاما Gam (1,0.5)							
	$\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1$		$\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.5,\varphi_2=.4$		$\varphi_1=.8,\varphi_2=.1$	
w_k	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$	$\hat{P}(w_k)$	$[\hat{P}(w_k)]^2$
w_1	0.00046	$3.0287e^{-7}$	0.00093	$1.2956e^{-6}$	0.01967	0.00074	0.02221	0.00096
w_{10}	0.00014	$4.0275e^{-8}$	0.00020	$8.2699e^{-8}$	0.00151	$4.4172e^{-6}$	0.00242	$1.1124e^{-5}$
w_{20}	0.00018	$6.1519e^{-8}$	0.00015	$4.1013e^{-8}$	0.00071	$1.0182e^{-6}$	0.00093	$1.7004e^{-6}$
w_{30}	0.00046	$4.2725e^{-7}$	0.00036	$2.5222e^{-7}$	0.00083	$1.3015e^{-6}$	0.00068	$8.5065e^{-7}$
w_{40}	0.00221	$1.3894e^{-5}$	0.00220	$1.1420e^{-5}$	0.00195	$8.7576e^{-6}$	0.00200	$1.1285e^{-5}$

جدول (2-9) يبين متوسط قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ وSSE لمخطط الدورية الكلاسيكي لتكرارات فورير ضمن الفترة $[2\pi/N, \pi]$، عندما يكون حجم العينة T=100 وبنسبة 20% قيم مفقودة منها (اي ان حجم العينة N=80)

The proposed value	عندما يكون حد الخطاء يتبع التوزيع الطبيعي N(0.5,0.25)			
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.00135 $1.0432e^{-5}$ 0.00042	0.00120 $8.5460e^{-6}$ 0.00034	0.00254 $4.5246e^{-6}$ 0.00181	0.00314 $6.8343e^{-5}$ 0.00273
The proposed value	عندما يكون حد الخطاء يتبع توزيع كاما Gam (1,0.5)			
	$(\varphi_1=-.8,\varphi_2=.1)$	$(\varphi_1=-.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.5,\varphi_2=.4)$	$(\varphi_1=.8,\varphi_2=.1)$
Average of $\hat{P}(w_k)$ Average of $[\hat{P}(w_k)]^2$ SSE	0.00057 $1.8968e^{-6}$ $7.5873e^{-5}$	0.00054 $1.4640e^{-6}$ $5.8561e^{-5}$	0.00229 $3.8099e^{-5}$ 0.00152	0.00283 $5.7624e^{-5}$ 0.00230

5. الأستنتاجات

أن اهم الاستنتاجات التي تم التوصل اليها من خلال نتائج هذا البحث. باستخدام مخطط الدورية الكلاسيكي ومخطط الدورية Lomb في حالة القيم المفقودة لأنموذج AR(2) المستقر، وللتوزيعات مفترضة لحد الخطأ في حالة اختلاف اوتساوي قيمة المتوسط والتباين لتلك التوزيعات، ولكلا الحجمين المفترض في البحث كالاتي

- ان استخدام مخطط الدورية Lomb يكون مفضل على استخدام مخطط الدورية الكلاسيكي لكونه يعطي اقل قيمة لمقدرالتوقع والتباين لدالة الكثافة الطيفية واقل قيمة للمعايير المعتمدة (المتوسط للتوقع والتباين لدالة الكثافة الطيفية و SSE) في المقارنة بين الطريقتين المستخدمة.
- تكون قيم SSE متزايدة بزيادة حجم العينة باستخدام مخطط الدورية الكلاسيكي في حين تكون تلك القيم متناقصة بزيادة حجم العينة باستخدام مخطط الدورية Lomb.
- اما تاثيرقيمة تباين حد الخطأ على تلك المقدرات وفي حالة حجم العينة N=80 فتكون متزايدة بتناقص قيمة التباين لحد الخطأ وثبات قيمة المتوسط له عندما يكون حد الخطأ يتبع توزيع كاما.في حين تكون متزايدة بزيادة قيمة التباين لحد الخطأ عندما يكون حد الخطأ يتبع التوزيع الطبيعي، بالرغم من وضع قيمة المتوسط مساوي للصفر باستخدام مخطط الدورية الكلاسيكي و Lomb.
- تشابه سلوك دالة الكثافة الطيفية بالطريقتين، أذ ان قيم المتوسط ($\hat{P}(w_k)$) وقيم التباين ($[\hat{P}(w_k)]^2$) لدالة الكثافة الطيفية المقدرة ولكل قيم φ_1 الموجبة تكون اكبرمقارنة بقيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ ولكل قيم φ_1 السالبة، حيث تزداد تلك القيم عند تكرارات فوريرالعالية ولكل قيم φ_1 السالبة، في حين تزداد قيم $\hat{P}(w_k)$ و $[\hat{P}(w_k)]^2$ عند تكرارات فوريرالمنخفضة ولكل قيم φ_1 الموجبة، على الرغم من ان تلك القيم باستخدام مخطط الدورية Lomb تكون اصغر منه باستخدام مخطط الدورية الكلاسيكي.

References:

1. J.D. Scargle, (1982), "Studies in astronomical time series analysis. II - Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data", Astrophysical Journal, Part 1, vol. 263, Dec. 15, 1982, p. 835-853.
2. Jian Huang and Finbarr O'Sullivan, (By internet)," The Spectral Density Estimation of Stationary Time series with Missing Data". http:// www.bcri. ucc. ie /BCR1_26.
3. N.R. Lomb, (1976),"Least-squares frequency analysis of unequally spaced data", Astrophysics and Space Science, vol. 39, Feb. 1976, p. 447-462.
4. Priestley, M. B. (1981), Spectral Analysis and time series, vol. I and II Academic press. London.
5. Wei, w.w.s. (1990), Time series Analysis: Univariate and Multivariate methods, Addison- wesly publishing –Inc., U.S.A.
6. W.H. press etal. (1991), Numerical recipes in fortran; Cambridge University press . Sect. 13.4 & 13.8.
7. V.V. Vityazev, (1997)," Time Series Analysis of Unequally Spaced Data: Intercomparison between Estimators of the Power Spectrum" Astronomical Data Analysis Software and systems VI, ASP Conference series, Vol.125.