



## استخدام نموذج ARIMA متعدد المتغيرات للتنبؤ بالتضخم والنمو السكاني في المناطق الحضرية: دراسة تطبيقية

م.د. علي محمد علي

الجامعة المستنصرية – كلية الادارة والاقتصاد – قسم الاحصاء

[alialfredawy@uomustansiriyah.edu.iq](mailto:alialfredawy@uomustansiriyah.edu.iq)

### المستخلص

تم في هذا البحث دراسة نموذج الانحدار الذاتي والأوساط المحركة المتكامل (ARIMA) Autoregressive Integrated Moving Average متعدد المتغيرات وأهميته وتطبيقه على بيانات حقيقية متمثلة بمتغير التضخم (معامل تكميش إجمالي الناتج المحلي) والنمو السكاني في المناطق الحضرية في العراق ضمن الفترة من 1961 إلى 2024 وتحديد النموذج الملائم بالاعتماد على معيار أكايك للمعلومات (Akaike Information Criteria (AIC) ومن ثم مقارنة النتائج مع السلاسل الزمنية الأحادية التي تم الحصول عليها نموذج ARIMA وأوضحت النتائج تفوق النموذج متعدد المتغيرات (Multivariate ARIMA) على النماذج الأحادية (Univariate ARIMA) وفقاً لمعايير المقارنة جذر متوسط مربعات الخطأ (Root Mean Square Error (RMSE) ومعيار متوسط الخطأ المطلق (Mean Absolute Error (MAE)، وقد تم استخدام النموذج المتعدد للتنبؤ إلى سنة 2035.

### 1- المقدمة

تعتبر السلاسل الزمنية من الأدوات الإحصائية الأساسية التي تستخدم في دراسة الظواهر المتغيرة مع الزمن في مختلف العلوم، حيث تتيح تحليل ديناميكية المتغيرات والتنبؤ بمسارها المستقبلي بالاعتماد على ماضيها. وتزداد أهمية تحليل السلاسل الزمنية في المجالات الاقتصادية والاجتماعية وذلك نظراً لما تقدمه من معلومات مهمة تساعد في اتخاذ القرارات الاستراتيجية وصياغة السياسات الملائمة (Privalsky, 2023). ومن بين الأساليب الإحصائية الأكثر شيوعاً في نمذجة السلاسل الزمنية يبرز نموذج الانحدار الذاتي والأوساط المحركة المتكامل (ARIMA) الذي قدمه بوكس وجينكنز (Box and Jenkins, 1976). ويتميز هذا النموذج بمرونته وقدرته على التعامل مع أنواع مختلفة من البيانات (مستقرة أو غير مستقرة) من خلال دمج مكونات الانحدار الذاتي (AR) والمتوسطات المتحركة (MA) والتفريق (I) عند الحاجة إلى جعل السلسلة مستقرة بعد أن كانت غير مستقرة. وقد حقق نموذج ARIMA الأحادي (Univariate)



(ARIMA) انتشاراً واسعاً في التطبيقات العملية لما يوفره من دقة في التنبؤ بالمتغيرات الفردية (Valenzuela et al., 2023).

إلا أن الاقتصار على نموذج أحادي المتغير قد يكون محدود الفائدة في حالة وجود أكثر من متغير مترابط زمنياً، حيث يتم تجاهل المعلومات المتبادلة بين السلاسل. من هنا برزت الحاجة إلى تطوير النماذج متعددة المتغيرات (Multivariate Time Series Models) التي تسمح بتحليل عدة سلاسل زمنية في آن واحد مع الأخذ في الاعتبار العلاقات البينية والتأثيرات المتبادلة فيما بينها (Woodward et al., 2022) وفي هذا السياق يعتبر نموذج ARIMA متعدد المتغيرات (MARIMA) امتداداً طبيعياً للنموذج الأحادي، إذ يتيح دمج عدة متغيرات مترابطة في إطار واحد يوفر قدرة أكبر على التفسير والتنبؤ. فبدلاً من الاعتماد على تاريخ المتغير نفسه فقط، يستفيد هذا النموذج من المعلومات الكامنة في المتغيرات الأخرى، الأمر الذي يؤدي غالباً إلى تحسين دقة التنبؤ وتقليل الخطأ مقارنة بالنماذج الأحادية (Shumway and Stoffer, 2025).

ولتنظيم عمل البحث فقد تم تقسيم ما تبقى منه إلى نموذج ARIMA الأحادي في القسم الثاني ونموذج ARIMA متعدد المتغيرات في القسم الثالث، بينما التطبيق على البيانات فقد تم وضعه في القسم الرابع والاستنتاجات في القسم الخامس، وفي النهاية وضعت المصادر.

## 2- نموذج ARIMA أحادي المتغير

تعتبر نماذج الانحدار الذاتي والأوساط المتحركة المتكاملة (Autoregressive Integrated Moving Average) واحد من أهم النماذج المستعملة في تمثيل السلاسل الزمنية؛ وذلك لكونها تعالج مسألة وجود ارتباط ذاتي، والصيغة العامة لنماذج (ARIMA) تكون كما يأتي ((Paul, 2024)؛ (Wei, 2006):

$$\Phi_p(B)(1-B)^d y_t = c + \theta_q(B)\eta_t \quad \dots (1)$$

إذ:

$y_t$ : السلسلة الزمنية عند النقطة  $t$ .

$c$ : ثابت السلسلة.

$B$ : عامل الإزاحة الخلفي.

$\eta_t$ : الأخطاء العشوائية عند النقطة  $t$  وتتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفري وتباين  $\sigma^2$ .

$\Phi_p$  و  $\theta_q$ : تمثل معاملات نموذج (ARIMA) برتبة  $(p,d,q)$ ، حيث أن  $p$  عدد معاملات الانحدار الذاتي، و  $q$  عدد معاملات الأوساط المتحركة، و  $d$  تمثل عدد مرات أخذ الفرق، وهما معرفتان بالشكل الآتي:



$$\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

$$\Theta_q(B) = 1 + \vartheta_1 B + \vartheta_2 B^2 + \dots + \vartheta_q B^q$$

وفيما يأتي بعد الأمثلة لبعض الحالات الخاصة ((Peixeiro, 2022)؛ ((Woodward et., 2022):

AR(1):

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \eta_t$$

AR(2):

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \eta_t$$

AR(p):

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \eta_t$$

MA(1):

$$y_t = c + \vartheta_1 \eta_{t-1} + \eta_t$$

MA(2):

$$y_t = c + \vartheta_1 \eta_{t-1} + \vartheta_2 \eta_{t-2} + \eta_t$$

MA(q):

$$y_t = c + \sum_{j=1}^q \vartheta_j \eta_{t-j} + \eta_t$$

ARMA(1,1):

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \vartheta_1 \eta_{t-1} + \eta_t$$

ARMA(1,2):

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \vartheta_1 \eta_{t-1} + \vartheta_2 \eta_{t-2} + \eta_t$$

ARMA(2,1):

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \vartheta_1 \eta_{t-1} + \eta_t$$

ARMA(2,2):

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \vartheta_1 \eta_{t-1} + \vartheta_2 \eta_{t-2} + \eta_t$$

ARMA(1,q):

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \sum_{j=1}^q \vartheta_j \eta_{t-j} + \eta_t$$

ARMA(p,1):

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \vartheta_1 \eta_{t-1} + \eta_t$$

ARMA(p,2):



$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \vartheta_1 \eta_{t-1} + \vartheta_2 \eta_{t-2} + \eta_t$$

ARMA(2,q):

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \sum_{j=1}^q \vartheta_j \eta_{t-j} + \eta_t$$

ARMA(p,q):

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \vartheta_j \eta_{t-j} + \eta_t$$

تجدر الإشارة إلى أن صياغة نموذج الأوساط المتحركة (MA) قد تختلف بين المراجع والبرمجيات الإحصائية؛ فبينما يعتمد ترميز Box–Jenkins التقليدي إشارة سالبة أمام معاملات التأخرات الزمنية (Lag) للأخطاء المتأخرة، نجد أن بعض المراجع الأخرى أو حزم البرمجيات (مثل بعض برامج الاقتصاد القياسي) تستعمل إشارة موجبة. وهذا الاختلاف لا يؤثر في جوهر النموذج أو نتائجه، وإنما يتعلق فقط بالترميز المستخدم.

كما تجدر الإشارة إلى أنه تم استخدام دالة (auto.arima) ضمن حزمة (forecast) في بيئة R المقدمة من قبل (Hyndman and Khandakar, 2008) لتقدير معاملات نموذج ARIMA، وتعتمد هذه الدالة في التقدير على طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Estimation (MLE) بعد الحصول على قيم ابتدائية باستخدام طريقة المربعات الصغرى الشرطية (Conditional Sum of Squares).

### 3- نموذج ARIMA متعددة المتغيرات

بعد أن قدم بوكس وجينكنز (Box and Jenkins, 1976) منهجية النماذج الأحادية من نوع ARIMA في كتابهم الشهير Time Series Analysis: Forecasting and Control، برزت الحاجة إلى تطوير إطار أوسع للتعامل مع عدة سلاسل زمنية مترابطة. فقد قام بوكس وتايو (Box and Tiao, 1977) بتعميق هذا الإطار النظري من خلال مناقشة قضايا التقدير والتعرف على النماذج متعددة المتغيرات، مؤكداً على قدرة هذا النهج في تفسير الترابطات الديناميكية بين أكثر من متغير. وفي نفس السياق، ظهر عدد من الأبحاث في بداية الثمانينيات، مثل عمل جينكنز والافي (Jenkins and Alavi, 1981) الذي ركز على بعض الجوانب التطبيقية في نمذجة وتنبؤ السلاسل الزمنية متعددة المتغيرات. كما أنه في منتصف الثمانينيات اتجهت إلى المقارنة التطبيقية بين هذه النماذج وغيرها من النماذج الديناميكية. وفي هذا السياق



يأتي عمل باكشاو (Bagshaw, 1987). الذي يعد من الدراسات المبكرة التي قارنت بشكل منهجي بين تلك النماذج.

وبالرغم من أن نماذج ARIMA متعددة المتغيرات تطورت منذ السبعينيات كأساس نظري، ثم تم إثراؤها وتطوير خوارزميات تقدير أكثر كفاءة في الثمانينيات، إلا أنها لا زالت تستخدم في نمذجة السلاسل متعددة المتغيرات فعلى سبيل المثال في مطلع الألفية الحالية هناك دراسات لتطبيقات هذه النماذج ( Andreoni and Postorino, 2006) و (Lin and Xirasagar, 2006) و (Tsitsika et al., 2007) و (Nirmala and Sundaram, 2010). وتواصلت هذه التطبيقات في العقد الثاني مثل دراسة (Goswami et al., 2018)، وصولاً إلى موجة جديدة من الدراسات في السنوات الثلاث الأخيرة (Diaz et al., 2023) و (Kumar et al., 2023) و (Ng et al., 2024) و (Pestano-Gabino et al., 2024) و (Safira et al., 2024) و (Abid et al., 2025) و (Becker, 2025) و (Düker et al., 2025) و (Sherly et al., 2025) و (Yang et al., 2025).

وتعتبر نماذج الانحدار الذاتي والأوساط المتحركة المتكاملة متعددة المتغيرات (MARIMA) امتداداً طبيعياً للنماذج الأحادية (ARIMA)، حيث تسمح بتمثيل أكثر من سلسلة زمنية في وقت واحد مع الأخذ بنظر الاعتبار الترابطات الديناميكية المتبادلة بينها. ويمكن تعريف النموذج العام كما يأتي (( Madsen, 2008)؛ (Tsay, 2013)؛ (Gómez, 2016)):

$$\Delta(B)\Phi(B)y_t = c + \theta(B)\eta_t \quad \dots (2)$$

إذ:

$y_t$ : متجه السلاسل الزمنية عند النقطة  $t$  بالبعد  $(m \times 1)$ ، حيث  $m$  يمثل عدد السلاسل الزمنية.

$c$ : متجه الثوابت بالبعد  $(m \times 1)$ .

$B$ : عامل الإزاحة الخلفي، حيث  $B y_t = y_{t-1}$ .

$\eta_t$ : متجه الأخطاء العشوائية عند النقطة  $t$  بالبعد  $(m \times 1)$  يتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات بمتوسط

هو متجه صفري ومصفوفة تباين هي  $\Sigma$ .

$\Delta(B)$ : مصفوفة التقريب، وهي مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسي فيها هي  $(1 - B)^{d_k}$ ، حيث

$$k=1,2,\dots,m$$

$\Phi$ : مصفوفة كثيرة الحدود للجزء AR، وتعطى كما يأتي:

$$\Phi(B) = I_{m \times m} - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$



حيث كل  $\Phi_i$  هي مصفوفة بالبعد  $(m \times m)$ ، و  $\rho$  هنا تحدد كأعلى رتبة انحدار ذاتي (AR) بين السلاسل الزمنية كافة. أما السلاسل ذات الرتب الأصغر، فتستكمل المعاملات غير المستخدمة فيها بأصفار، وبذلك يحافظ على صياغة موحدة للنموذج عبر جميع المتغيرات.

$\Theta$ : مصفوفة كثيرة الحدود للجزء MA، وتعطى كما يأتي:

$$\Theta(B) = I_{m \times m} + \Theta_1 B + \Theta_2 B^2 + \dots + \Theta_q B^q$$

حيث كل  $\Theta_j$  هي مصفوفة بالبعد  $(m \times m)$ ، و  $q$  هنا تحدد كأعلى رتبة للأوساط المتحركة (MA) بين السلاسل الزمنية كافة. أما السلاسل ذات الرتب الأصغر، فتستكمل المعاملات غير المستخدمة فيها بأصفار، وبذلك نحصل على تمثيل موحد للنموذج لجميع المتغيرات. وفيما يأتي بعد الأمثلة لبعض الحالات الخاصة:

MAR(1):

$$y_t = c + \Phi_1 y_{t-1} + \eta_t$$

MMA(1):

$$y_t = c + \Theta_1 \eta_{t-1} + \eta_t$$

MARMA(1,1):

$$y_t = c + \Phi_1 y_{t-1} + \Theta_1 \eta_{t-1} + \eta_t$$

وكمثال على التفريق غير المتجانس، عند وجود سلسلتين ( $k=2$ ) وتكون السلسلة الأولى مستقرة عند  $(d_1)$ ، والثانية مستقرة عند  $(d_2)$  فإن مصفوفة التفريق الناتجة هي:

$$\Delta(B) = \begin{bmatrix} (1-B)^{d_1} & 0 \\ 0 & (1-B)^{d_2} \end{bmatrix}$$

وبذلك فالنموذج يكون كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} (1-B)^{d_1} & 0 \\ 0 & (1-B)^{d_2} \end{bmatrix} (I_{m \times m} - \Phi_1 B) \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + (I_{m \times m} + \Theta_1 B) \begin{bmatrix} \eta_{1,t} \\ \eta_{2,t} \end{bmatrix}$$

تعتبر طريقة الإمكان الأعظم (MLE) الإطار الإحصائي القياسي لنماذج MARIMA تحت افتراض أن للأخطاء توزيع طبيعي؛ حيث يتم تقدير معاملات  $\Phi$  و  $\Theta$  مع مصفوفة التباين  $\Sigma$  عن طريق تعظيم لوغاريتم دالة الإمكان، ولكن بالرغم من امتلاك هذه المقدرات خواص الاتساق والكفاءة إلا أنها مكلفة حسابياً خصوصاً عند زيادة عدد المتغيرات والرتب. ولذلك اقترح سبليد (Spliid, 1983) خوارزمية سريعة لذلك وهي نفس الخوارزمية المستخدمة في دالة marima ضمن حزمة تحمل نفس الاسم في بيئة R. وتتلخص فكرة الخوارزمية في أنها تعتمد على تحويل نموذج MARIMA إلى سلسلة مسائل انحدار خطي يتم حلها تكرارياً.

#### 4- التطبيق



#### 4-1 وصف البيانات

تم تمثيل بيانات الدراسة القراءات السنوية لمتغيري التضخم (معامل تكميش إجمالي الناتج المحلي) والنمو السكاني في المناطق الحضرية ضمن الفترة من 1961 إلى 2024 في العراق. والبيانات أخذت من مجموعة البنك الدولي (<https://data.albankaldawli.org>). والبيانات وضعت في الجدول الآتي:

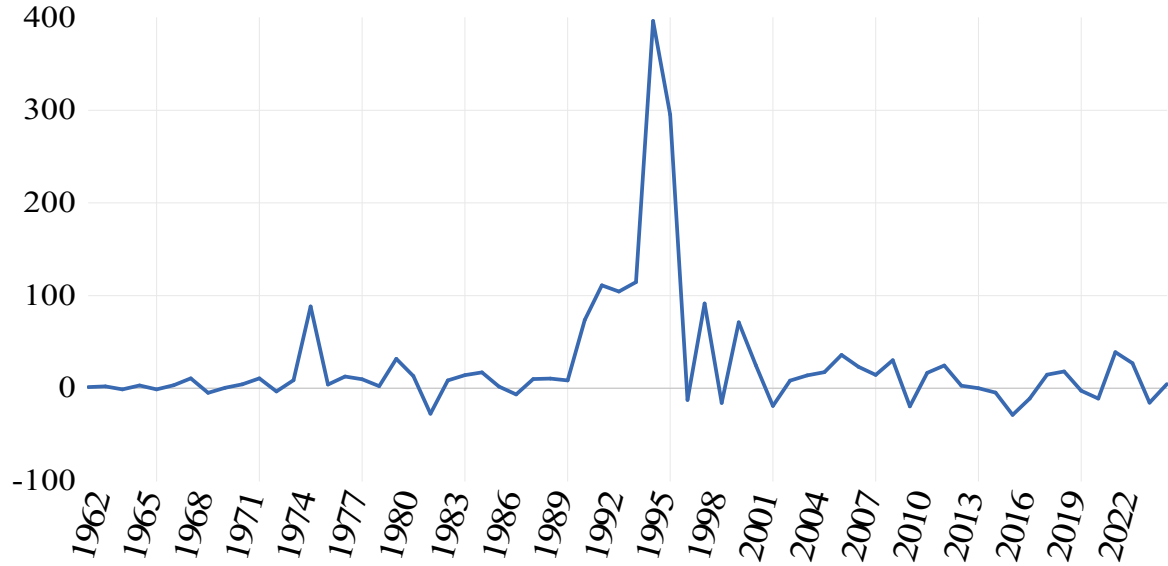
جدول (1): بيانات الدراسة

النمو السكاني	التضخم	السنوات	النمو السكاني	التضخم	السنوات
5.40406	114.46767	1993	-0.29455	1.33909	1961
5.37372	396.43802	1994	0.18131	2.01537	1962
3.94726	295.36767	1995	0.45051	-1.20056	1963
3.78909	-12.54414	1996	0.33489	3.02627	1964
3.68911	91.49880	1997	0.27139	-1.29241	1965
3.19559	-15.95043	1998	0.89467	3.20586	1966
3.06282	71.15110	1999	1.14054	10.63745	1967
3.10628	24.74637	2000	1.11681	-5.01018	1968
2.94742	-19.15081	2001	1.09165	0.57477	1969
2.98719	8.16787	2002	1.07245	4.35297	1970
2.84309	13.85612	2003	1.00728	10.65004	1971
2.67884	17.30934	2004	0.93996	-3.38210	1972
2.79101	35.85339	2005	0.91258	8.75411	1973
0.56344	23.05406	2006	0.80248	88.33255	1974
-0.96237	14.43904	2007	0.68338	3.88439	1975
1.84666	30.17541	2008	0.59857	12.58586	1976
3.51321	-19.52120	2009	0.61427	9.65043	1977
2.83408	16.58674	2010	1.22975	2.32695	1978
2.99635	24.68944	2011	1.31803	31.66701	1979
4.00384	2.66977	2012	1.22943	13.20175	1980
4.18691	-0.01133	2013	1.06454	-27.52259	1981
2.99348	-4.80664	2014	0.85483	8.33422	1982
2.18666	-28.76014	2015	0.99478	14.19169	1983
1.81471	-11.10417	2016	1.11835	17.02935	1984
1.61339	14.65036	2017	0.39237	1.68905	1985
1.67412	18.20399	2018	0.42627	-6.73152	1986
1.57831	-2.67444	2019	0.69231	9.89416	1987
1.48345	-11.22020	2020	2.13640	10.43125	1988
1.46180	38.89983	2021	3.26911	8.40159	1989
1.47669	26.94161	2022	1.84594	73.64539	1990



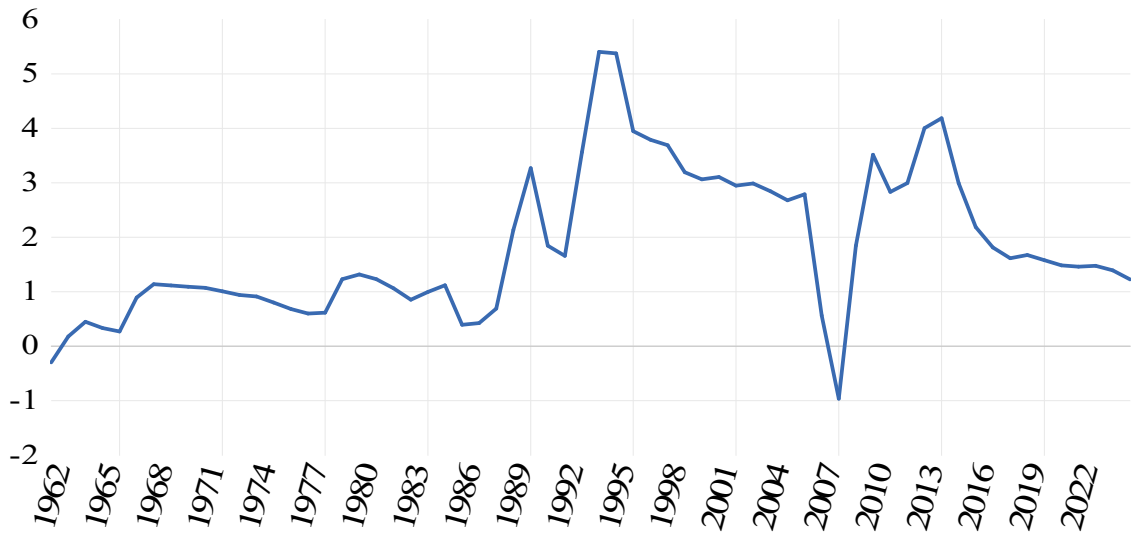
1.39255	-15.53472	2023	1.65818	111.12642	1991
1.22641	4.36968	2024	3.56418	104.50077	1992

والشكلين (1) و(2) يمثلان رسم السلسلتين.



شكل (1): رسم سلسلة التضخم

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات EViews 12.



شكل (2): رسم سلسلة النمو السكاني في المناطق الحضرية

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات EViews 12.

#### 4-2 بعض الإحصاءات الوصفية

تم حساب بعض الإحصاءات الوصفية لمتغيري الدراسة فضلاً عن معامل ارتباط بيرسون بينهما وكما في الجدول الآتي:

جدول (2): الإحصاءات الوصفية لمتغيري الدراسة

النمو السكاني في المناطق الحضرية	التضخم (معامل تكميش إجمالي الناتج المحلي)	الإحصاءات
-0.96238	-28.76014	أقل قيمة
1.46924	9.20227	الوسيط
5.40406	396.43800	أعلى قيمة
1.83300	25.97762	الوسط الحسابي
1.34239	66.43284	الانحراف المعياري
0.46727 (P=0.0001)		معامل الارتباط

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات EViews 12.

يبين الجدول (2) الإحصاءات الوصفية لمتغيري الدراسة، حيث يتضح أن التضخم الممثل بمعامل تكميش إجمالي الناتج المحلي يتسم بتقلبات واسعة إذ بلغ أدنى قيمة له -28.76 وأعلى قيمة 396.43 وبمتوسط قدره 25.98 وانحراف معياري مرتفع بلغ 66.43، كما أن الوسيط (9.20) جاء أقل بكثير من المتوسط مما يشير إلى تأثير السلسلة بالقيم المتطرفة، في حين أن النمو السكاني في المناطق الحضرية كان أكثر استقراراً حيث تراوحت قيمه بين -0.96 و 5.40 بمتوسط 1.83 وانحراف معياري 1.34 وبوسيط قريب نسبياً من المتوسط (1.47) مما يعكس توزيعاً أكثر توازناً. أما فيما يخص العلاقة بين المتغيرين فقد أظهر معامل ارتباط بيرسون قيمة موجبة متوسطة القوة بلغت 0.467 عند مستوى معنوية (P=0.0001)، وهو ما يشير إلى وجود علاقة ارتباط ذات دلالة إحصائية بين ارتفاع التضخم وارتفاع معدل النمو السكاني الحضري.

#### 3-4 تحديد درجة التكامل ودوال ACF و PACF

لتحديد درجة تكامل كل سلسلة من متغيرات الدراسة تم استخدام اختبار ديكي فولر الموسع (ADF) Augmented Dickey-Fuller واختبار فيليبس بيرون (PP) Phillips-Perron لجذر الوحدة، وكماي يأتي:

جدول (3): نتائج اختبار الاستقرار لمتغيرات الدراسة

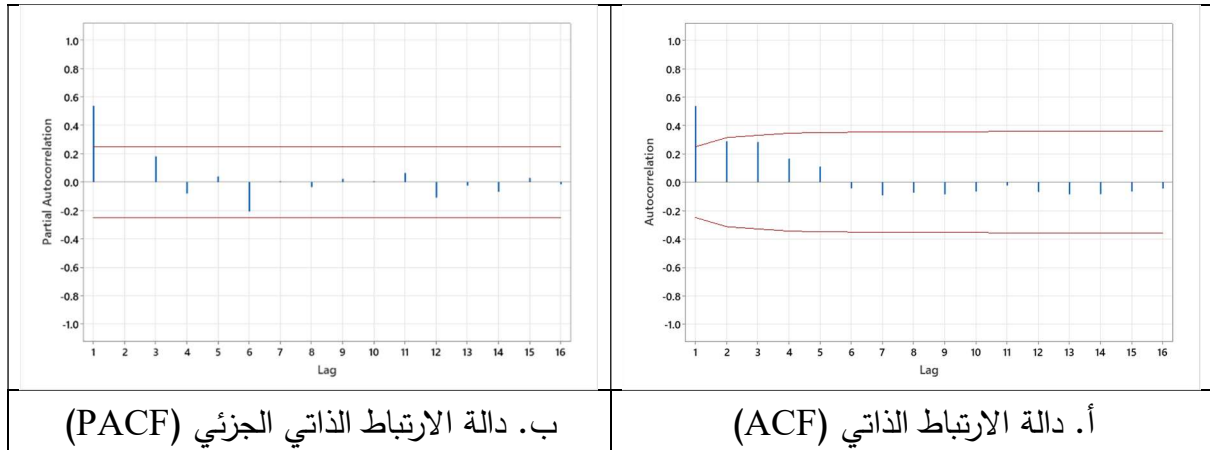
درجة التكامل	اختبار PP		اختبار ADF		المتغيرات
	الفرق الأول	المستوى	الفرق الأول	المستوى	

I(0)	-	0.0002	-	0.0002	التضخم (معامل تكميش إجمالي الناتج المحلي)
I(1)	0.0000	0.1018	0.0001	0.1373	النمو السكاني في المناطق الحضرية

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات EViews 12.

والنتائج أعلاه تمثل القيمة الاحتمالية لكلا الاختبارين وتشير إلى أن رتبة تكامل سلسلة التضخم هي صفر لأنها مستقرة عند المستوى  $(d_1=0)$ ، بينما سلسلة النمو السكاني في المناطق الحضرية تصبح مستقرة عند الفرق الأولى وبذلك فهي ذات رتبة تكامل هي واحد  $(d_2=1)$ .

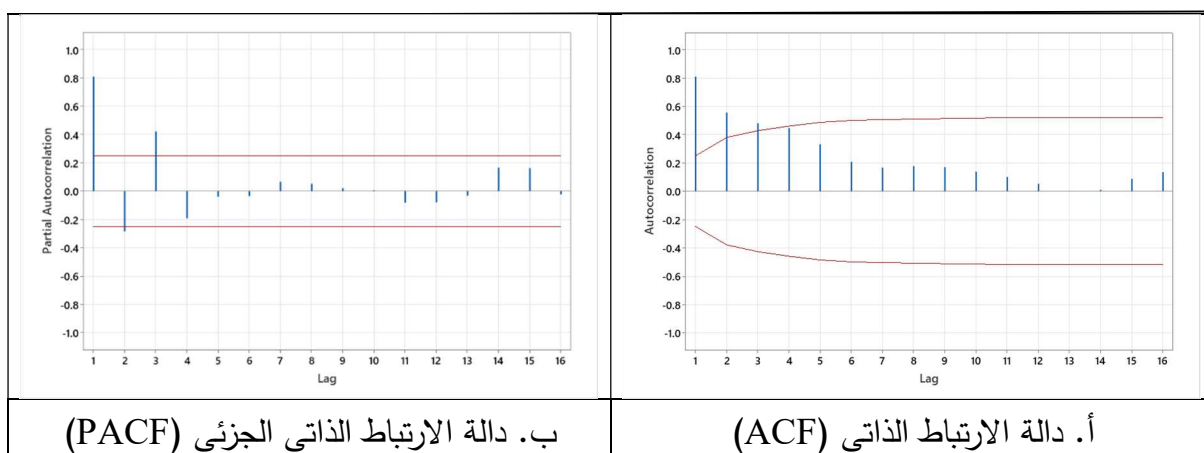
والشكلين الآتيين يمثلان رسم دالة الارتباط الذاتي (Autocorrelation Function (ACF)، ودالة الارتباط الذاتي الجزئي (Partial Autocorrelation Function (PACF).



شكل (3): رسم دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لسلسلة التضخم

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات Minitab 21.

يبين الشكل (3-أ) أن القيم عند التخلفات الزمنية القليلة (lag 1-3) كانت معنوية كونها تقع خارج حدود الثقة، ثم تبدأ بالانخفاض التدريجي مع بقاء بعض القيم عند تخلفات زمنية لاحقة قريبة من الصفر. هذا النمط يوحي بوجود أثر أوساط متحركة في السلسلة، مع احتمالية ملاءمة نموذج من نوع MA أو ARMA منخفض الرتبة، بينما يظهر الشكل (3-ب) أن أول تخلف زمني (lag 1) مهمة وبقية القيم تتذبذب حول الصفر بدون دلالة معنوية كبيرة. هذا النمط يتسق مع سلوك عملية انحدار ذاتي من الرتبة الأولى  $AR(1)$ ، مما يعزز إمكانية توصيف التضخم بنموذج ARIMA ذي رتبة انحدار بسيطة.



شكل (4): رسم دالتي الارتباط الذاتي والذاتي الجزئي لسلسلة النمو السكاني في المناطق الحضرية

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات Minitab 21.

يتضح من الشكل (4-أ) أن القيم المبدئية لـ ACF موجبة ومهمة لعدد أكبر من التخلفات الزمنية (حتى lag 4 تقريباً)، ثم تنخفض تدريجياً وتظل بعض القيم الموجبة قريبة من حدود الثقة، مما قد يتطلب نموذج AR أو MA من رتبة أعلى قليلاً من سلسلة التضخم، في حين يبين الشكل (4-ب) أن أول 3 تخلفات زمنية لهما دلالة معنوية واضحة، بينما بقية التخلفات الزمنية تقع قرب الصفر. هذا النمط يتماشى مع نموذج انحدار ذاتي من الدرجة الثانية AR(2) (بسبب أنها مستقرة عند الفرق الأول) أو قريب منه، ما يوضح وجود أثر زمني ممتد لكنه محدود.

#### 4-4 نتائج نموذج ARIMA الأحادي

تم الحصول على النتائج الخاصة بالاعتماد على دالة auto.arima، التي سبقها ذكرها، وهذه الدالة ما يميزها أنها تختار أفضل نموذج من بين مجموعة نماذج بعد أن يتم المفاضلة بينها عن طريق معيار أكايك للمعلومات (AIC) وكانت النتائج كما يأتي:

جدول (4): نتائج نموذج ARIMA الأحادي لمتغيرات الدراسة

MAE	RMSE	AIC	q	d	p	المتغيرات
29.93538	56.39468	702.2	0	0	1	التضخم (معامل تكميش إجمالي الناتج المحلي)
0.3519974	0.5740105	117.48	1	1	2	النمو السكاني في المناطق الحضرية

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات R 4.2.2.



يبين الجدول (4) نتائج النماذج الأحادية لمتغيري الدراسة والمحددة باستخدام دالة auto.arima، التي تعمل على اختيار النموذج الأمثل استناداً إلى معيار أكايك للمعلومات (AIC). يتضح أن أفضل نموذج لسلسلة التضخم (معامل تكميش إجمالي الناتج المحلي) هو  $ARIMA(1,0,0)$ ، أي نموذج انحدار ذاتي من الدرجة الأولى بدون تفريق وبدون أوساط متحركة، مما يشير إلى أن السلسلة مستقرة ولا تحتاج إلى فرق، وأنها تتأثر بقيمتها المتأخرة المباشرة فقط. بلغت قيمة AIC لهذا النموذج 702.2 مع قيم لجذر متوسط مربعات الخطأ (RMSE) بلغت 56.39 ومتوسط الخطأ المطلق (MAE) بلغ 29.94. أما بالنسبة لسلسلة النمو السكاني في المناطق الحضرية، فقد كان النموذج الأمثل هو  $ARIMA(2,1,1)$ ، أي نموذج انحدار ذاتي من الدرجة الثانية مع فرق واحد وأوساط متحركة من الدرجة الأولى. وهذا يعني أن السلسلة غير مستقرة في مستوياتها لكنها تصبح مستقرة بعد أخذ الفرق الأول (كما أكد ذلك اختبارات ديكي فولر الموسع وفيلبس بيرون)، وأنها تتأثر بكل من القيم المتأخرة والمتغيرات العشوائية السابقة. وقد حقق هذا النموذج قيمة AIC منخفضة نسبياً (117.48) مع قيمة RMSE بلغت 0.574 و MAE بلغت 0.352.

#### 4-5 نتائج نموذج ARIMA متعدد المتغيرات

تم الحصول على النتائج الخاصة بالاعتماد على دالة marima، وهذه الدالة ليست كدالة auto.arima، فهي تحتاج إلى أن نحدد لها رتب AR و MA و d، حيث سيتم اعتمادها كما تحددت من اختبارات جذر الوحدة، أما AR و MA فسيتم تحديد قيم بين 0 و 2 لتراكيب مختلفة والمقارنة بين النماذج عن طريق معيار AIC، وكما يأتي:

ما يميزها أنها تختار أفضل نموذج من بين مجموعة نماذج بعد أن يتم المفاضلة بينها عن طريق معيار أكايك للمعلومات (AIC) وكانت النتائج كما يأتي:

جدول (5): المفاضلة بين النماذج لمتغير لمتغيرات الدراسة

AIC	q	d	p	المتغيرات	ت
834.311	1	0	0	التضخم	1
	1	1	1	النمو السكاني	
839.749	1	0	0	التضخم	2
	2	1	1	النمو السكاني	
844.777	1	0	0	التضخم	3
	1	1	2	النمو السكاني	
850.309	1	0	0	التضخم	4
	2	1	2	النمو السكاني	
834.311	0	0	1	التضخم	5
	1	1	1	النمو السكاني	



850.919	0	0	1	التضخم	6
	2	1	1	النمو السكاني	
838.61	0	0	1	التضخم	7
	1	1	2	النمو السكاني	
846.859	0	0	1	التضخم	8
	2	1	2	النمو السكاني	
834.311	1	0	1	التضخم	9
	1	1	1	النمو السكاني	
839.749	1	0	1	التضخم	10
	2	1	1	النمو السكاني	
838.61	1	0	1	التضخم	11
	1	1	2	النمو السكاني	
843.582	1	0	1	التضخم	12
	2	1	2	النمو السكاني	

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات R 4.2.2.

يبين الجدول نتائج تقدير مجموعة من النماذج الثنائية (MARIMA) لمتغيري الدراسة، حيث اعتمدت المقارنة بينها على معيار أكايك للمعلومات (AIC). ومن خلال القيم المعروضة يمكن ملاحظة أن أدنى قيمة لـ AIC بلغت نحو (834.311) وتكررت في أكثر من حالة عندما مثل متغير التضخم بنماذج بسيطة من نوع ARMA منخفضة الرتبة مثل (0,0,1) أو (1,0,0) أو (1,0,1)، في حين مثل متغير النمو السكاني الحضري غالباً بنموذج ARIMA(1,1,1). وتشير هذه النتيجة إلى أن النماذج ذات الرتب البسيطة تحقق أفضل ملاءمة للبيانات مقارنة بالنماذج الأكثر تعقيداً مثل (2,1,2)، والتي أدت إلى ارتفاع قيمة AIC إلى ما يزيد عن (850) من دون تحقيق تحسن في الملاءمة. وبذلك سيتم اختيار نموذج ذي التسلسل 5 والذي يجمع بين البساطة وبين نموذج ARIMA الأحادي الملائم. والجدول الآتي يمثل نتائج النموذج الملائم:

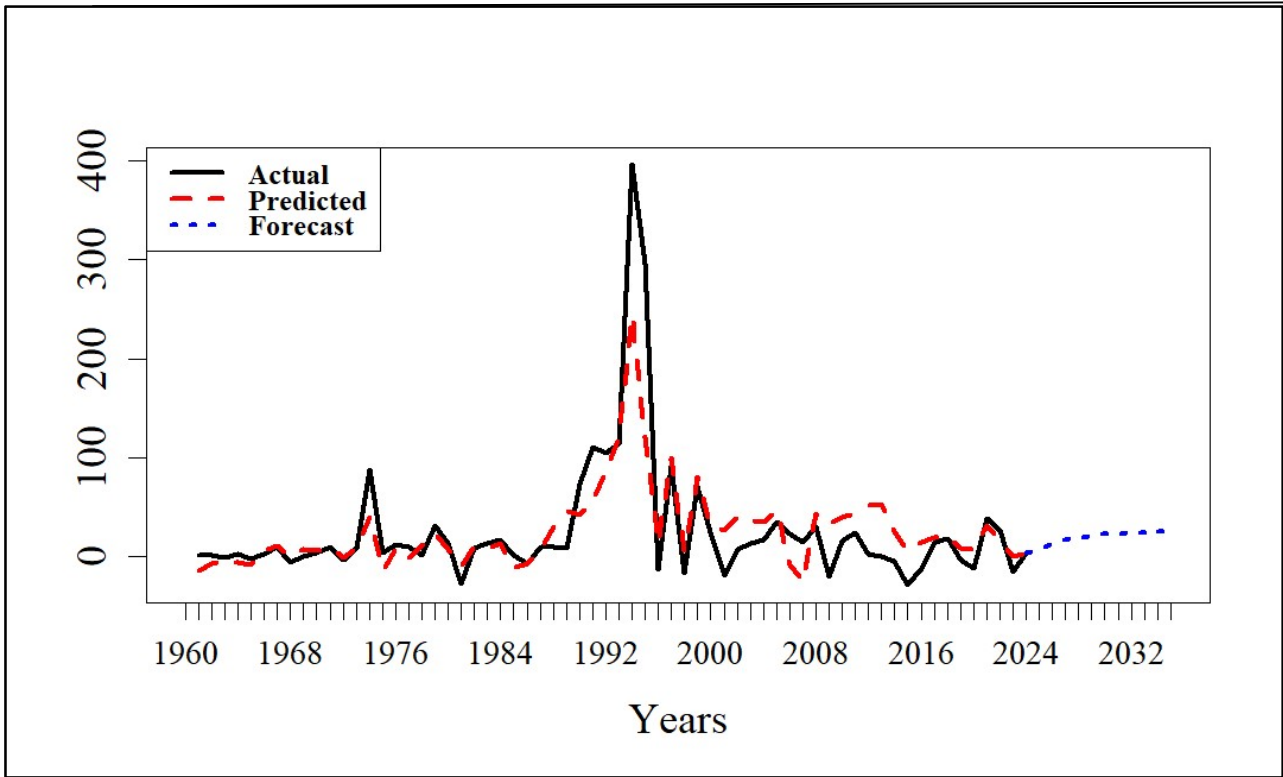
جدول (6): نتائج نموذج ARIMA متعدد المتغيرات

MAE	RMSE	AIC	q	d	p	المتغيرات
21.60087	36.9141	834.311	0	0	1	التضخم (معامل تكميش إجمالي الناتج المحلي)
0.3079238	0.4957607		1	1	1	النمو السكاني في المناطق الحضرية

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات R 4.2.2.

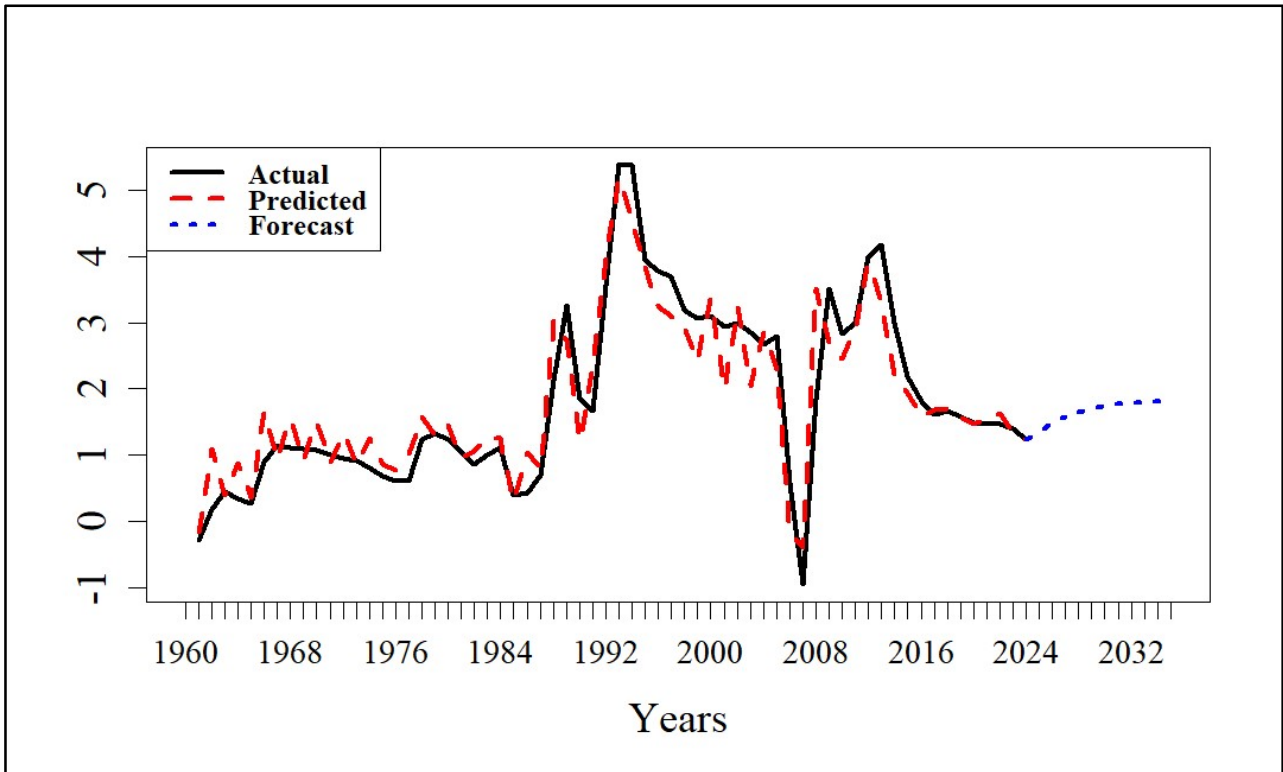


يبين جدول (6) نتائج تقدير نموذج ARIMA متعدد المتغيرات (MARIMA) لمتغيري الدراسة. يتضح أن أفضل تمثيل لسلسلة التضخم هو  $AR(1)$  بدون فرق أو أوساط متحركة، مما يشير إلى استقرار السلسلة وارتباطها القوي بالقيمة المتأخرة الأولى فقط. بينما أظهر النمو السكاني في المناطق الحضرية ملاءمة أكبر عند استخدام نموذج  $ARIMA(1,1,1)$ ، أي أنه يحتاج إلى فرق أول لتحقيق الاستقرار، مع وجود أثر لكل من الانحدار الذاتي والأوساط المتحركة. ومن حيث كفاءة النموذج، فإن قيمة معيار أكايك للمعلومات (AIC) بلغت 834.311، وهي أقل من القيم التي ظهرت في بعض النماذج البديلة السابقة، مما يعزز ملاءمته. أما من ناحية دقة التنبؤ، فقد بلغت قيمة RMSE للتضخم نحو 36.91 ومتوسط الخطأ المطلق  $MAE = 21.60$ ، وهو أقل بوضوح من النماذج المنفردة التي تم ذكرها في الجدول (4)، بينما كانت قيم الأخطاء أقل للنمو السكاني الحضري ( $RMSE \approx 0.496$  و  $MAE \approx 0.308$ )، الأمر الذي يعكس أن النموذج أكثر دقة في تمثيل النمو السكاني مقارنة بالنموذج المنفرد. ولأن نموذج MARIMA أعطى نتائج أفضل من نماذج ARIMA منفصلة فقد تم استخدامه في حساب القيم التقديرية والتنبؤية المستقبلية والشكلان (5) و(6) يوضحان رسم السلسلتين وتقديرهما والتنبؤ بهما، حيث يبين ملاءمة النموذج للبيانات الحقيقية إلى حد كبير.



شكل (5): رسم سلسلة التضخم مع تقديرها والتنبؤ بها

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات R 4.2.2.



شكل (6): رسم سلسلة النمو السكاني في الحضر مع تقديرها والتنبؤ بها

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات R 4.2.2.

كما يمكن وضع القيم التنبؤية إلى عام 2035 لكل سلسلة في الجدول الآتي:

جدول (7): القيم التنبؤية لمتغيري الدراسة

السنوات	التضخم (معامل تكميش إجمالي الناتج المحلي)	النمو السكاني في المناطق الحضرية
2025	8.07692	1.34143
2026	13.56819	1.47997
2027	17.11576	1.58247
2028	19.68259	1.65484
2029	21.50176	1.70635
2030	22.79574	1.74296
2031	23.71556	1.76899
2032	24.36949	1.78749
2033	24.83437	1.80065
2034	25.16487	1.81000
2035	25.39982	1.81665

المصدر: إعداد الباحث بالاعتماد على مخرجات R 4.2.2.

## 5- الاستنتاجات

يظهر من نتائج التحليل أن نماذج ARIMA الأحادية وفرت توصيفاً مقبولاً لكل متغير على حدة، حيث كان نموذج AR(1) هو الأنسب لسلسلة التضخم بينما كان النموذج ARIMA(2,1,1) هو الأكثر ملاءمة للنمو السكاني الحضري. غير أن هذه النماذج لم تأخذ بنظر الاعتبار الترابط بين المتغيرين، والذي أثبتت النتائج أن الترابط كان معنوياً. وعند الانتقال إلى نموذج ARIMA متعدد المتغيرات (MARIMA) برزت أهمية دمج السلاسل الزمنية في إطار مشترك، إذ أسفر النموذج عن انخفاض واضح في قيم معايير المقارنة مثل AIC، إضافة إلى تحسن دقة التقدير وفقاً لمقاييس RMSE و MAE. وقد أظهر التضخم استقراراً يمكن وصفه بنموذج AR(1)، بينما احتاج النمو السكاني إلى نموذج ARIMA(1,1,1) يدمج بين الانحدار الذاتي والفرق والأوساط المتحركة. هذه النتائج تؤكد أن النماذج المتعددة لا تعكس فقط العلاقات الديناميكية المتبادلة، بل تتفوق أيضاً في الأداء التنبؤي على النماذج الأحادية، كما يتضح من التنبؤات الممتدة حتى عام 2035 التي أظهرت انسجاماً مع الاتجاهات الفعلية. وبالتالي، فإن نموذج MARIMA يوفر إطاراً أكثر دقة وموثوقية للتنبؤ بالظواهر الاقتصادية والديموغرافية مقارنة بالنماذج الأحادية.



## المصادر

1. Abid, S. H., Quaez, U. J., & Contreras-Reyes, J. E. (2025). Rényi entropy for multivariate controlled autoregressive moving average systems. *International Journal of Systems Science*, 1-13.
2. Andreoni, A., & Postorino, M. N. (2006). A multivariate ARIMA model to forecast air transport demand. *Proceedings of the Association for European Transport and Contributors*, 1-14.
3. Bagshaw, M. L. (1987). Univariate and multivariate ARIMA versus vector autoregression forecasting (No. 87-06).
4. Becker, M. (2025). Varma Versus Steady-State Bvar for Macroeconomic Forecasting.
5. Box, G. E. P., & Jenkins, G. M. (1976). *Time series analysis: Forecasting and control*. San Francisco, CA: Holden-Day.
6. Box, G. E. P., & Tiao, G. C. (1977). A canonical analysis of multiple time series. *Biometrika*, 64(2), 355–365.
7. Diaz, J., Agioutantis, Z., Hristopulos, D. T., Luxbacher, K., & Schafrik, S. (2023). Forecasting of methane gas in underground coal mines: univariate versus multivariate time series modeling. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 37(6), 2099-2115.
8. Düker, M. C., Matteson, D. S., Tsay, R. S., & Wilms, I. (2025). Vector autoregressive moving average models: A review. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 17(1), e70009.
9. Goswami, K., Ganguly, A., & Sil, A. K. (2018). Comparing univariate and multivariate methods for short term load forecasting. In *2018 International Conference on Computing, Power and Communication Technologies* (pp. 972-976). IEEE.
10. Gómez, V. (2016). *Multivariate time series with linear state space structure*. New York, NY: Springer.
11. Jenkins, G. M., & Alavi, A. (1981). Some aspects of modelling and forecasting multivariate time series. *Journal of Time Series Analysis*, 2(1), 1–47. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1981.tb00319.x>
12. Kumar, P., Priyanka, P., Dhanya, J., Uday, K. V., & Dutt, V. (2023). Analyzing the performance of univariate and multivariate machine learning models in soil movement prediction: A comparative study. *IEEE Access*, 11, 62368-62381.
13. Hyndman, R. J., & Khandakar, Y. (2008). Automatic time series forecasting: the forecast package for R. *Journal of statistical software*, 27, 1-22.



14. Lin, H. C., & Xirasagar, S. (2006). Seasonality of hip fractures and estimates of season-attributable effects: a multivariate ARIMA analysis of population-based data. *Osteoporosis international*, 17(6), 795-806.
15. Madsen, H. (2008) *Time Series Analysis*, Chapman & Hall
16. Ng, Y. N., Lim, H. Y., Cham, Y. C., Bakar, M. A. A., & Ariff, N. M. (2024). Comparison Between LSTM, GRU and VARIMA in Forecasting of Air Quality Time Series Data. *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences*, 20(6), 1248-1260.
17. Nirmala, M., & Sundaram, S. M. (2010). Modeling and predicting the monthly rainfall in Tamilnadu as a seasonal multivariate ARIMA process. *Int J Comput Eng Technol*, 1(1), 103-111.
18. Paul, B. (2024). *Time Series Data Analysis: Unlocking Patterns and Predictions in Sequential Data*.
19. Peixeiro, M. (2022). *Time series forecasting in python*. Simon and Schuster.
20. Pestano-Gabino, C., González-Concepción, C., & Gil-Fariña, M. C. (2024). VARMA Models with Single-or Mixed-Frequency Data: New Conditions for Extended Yule–Walker Identification. *Mathematics*, 12(2), 244.
21. Privalsky, V. (2023). *Practical Time Series Analysis in Natural Sciences. Applications to Natural Sciences and Engineering*: Springer.
22. Safira, D. A., Kuswanto, H., & Ahsan, M. (2024). Improving the forecast accuracy of PM2. 5 using SETAR-Tree method: Case study in Jakarta, Indonesia. *Atmosphere*, 16(1), 23.
23. Sherly, A., Christo, M. S., & Elizabeth, J. V. (2025). A Hybrid Approach to Time Series Forecasting: Integrating ARIMA and Prophet for Improved Accuracy. *Results in Engineering*, 105703.
24. Spliid, H. (1983). A fast estimation method for the vector autoregressive moving average model with exogenous variables. *Journal of the American Statistical Association*, 78(384), 843–849.
25. Shumway, R. H., & Stoffer, D. S. (2025). *Time series analysis and its applications: with R examples*. 5<sup>th</sup> Edition. Springer.
26. Tsitsika, E. V., Maravelias, C. D., & Haralabous, J. (2007). Modeling and forecasting pelagic fish production using univariate and multivariate ARIMA models. *Fisheries science*, 73(5), 979-988.
27. Tsay, R. S. (2013). *Multivariate time series analysis: with R and financial applications*. John Wiley & Sons.
28. Valenzuela, O., Rojas, F., Herrera, L. J., Pomares, H., & Rojas, I. (2023). *Theory and Applications of Time Series Analysis and Forecasting*. Springer.
29. Wei, William W.S., (2006). *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*, 2nd Ed., Pearson Education Inc., New-York



- 
30. Woodward, W. A., Sadler, B. P., & Robertson, S. (2022). Time series for data science: Analysis and forecasting. Chapman and Hall/CRC.
31. Yang, D., Tang, Y., Chan, V. K. Y., Fang, Q., Chan, S. S. M., Luo, H., ... & Li, X. (2025). Population-Wide Depression Incidence Forecasting Comparing Autoregressive Integrated Moving Average and Vector Autoregressive Integrated Moving Average to Temporal Fusion Transformers: Longitudinal Observational Study. *Journal of medical Internet research*, 27, e67156.