تقدير دالة المعولية لنظام تتابعي لتوزيع(Frechet -Weibull) بوجود بيانات ملوثة

زهراء ناصر ساري
أ.م.د. علي ناصر حسين
جامعة البصرة / كلية الادارة والاقتصاد / قسم الاحصاء

المستخلص :

يتناول هذا البحث مشكلة تقدير دالة معولية النظام التتابعي (Cascade) لنموذج الإجهاد–المتانة تحت توزيع–Fréchet Weibullفي ظل وجود قيم شاذة أو متطرفة في البيانات.أذ تؤثر هذه القيم الشاذة سلبًا على دقة طرائق التقدير التقليدية،ولاسيما طريقة الإمكان الأعظم(MLE) ، مما يستدعي اعتماد أساليب تقدير حصينة.(Robust)

لمعالجة هذه المشكلة، تم اقتراح نموذج يعتمد على فكرة **التوزيعات المختلطة(Mixture Distributions)** ، حيث يفترض أن المجتمع الإحصائي يتكون من خليط من مجتمعين: أحدهما يمثل البيانات الأصلية والآخر يمثل القيم الشاذة، ولكل منهما توزيعWeibull متغير المتانة وتوزيعFréchet متغير الإجهاد ولكن بمعلمات مختلفة. تمت مقارنة أداء طريقة التوزيعات المختلطة (MXE)مع طريقة الإمكان الأعظم التقليدية(MLE) . اعتمدت الدراسة على محاكاة مونت كارلو لتوليد بيانات المقترحة ملوثة وبنسب مختلفة، وبأحجام عينات صغيرة ومتوسطة وكبيرة (25، 50، 150). وتم تقييم أداء الطريقتين باستخدام معيار متوسط مربع الخطأMSE .

أظهرت النتائج تفوق طريقة التوزيعات المختلطة (MXE) في إنتاج مقدرات أكثر دقة وأقل تأثراً بالقيم الشاذة، لاسيما في حالات العينات الصغيرة والمتوسطة(n=25, 50) حيث أظهرت طريقة الإمكان الأعظم (MLE)تحسناً في الدقة مع كبر حجم العينة(n=150) .

تم التوصل الى مجموعة من الاستنتاجات وأهمها :أن استخدام نموذج التوزيعات المختلطة مع طريقة الإمكان الأعظم يوفر أسلوبًا حصينًا وفعالاً لتقدير معولية الأنظمة التتابعية المعقدة في بيئات البيانات غير المثالية، مما يساهم في تحسين تقييم الموثوقية واتخاذ القرارات في المجالات الهندسية والصناعية.

الكلمات المفتاحية: المعولية، النظام التتابعي نموذج الاجهاد-المتانة، التوزيعات المختلطة، التقدير الحصين.

Robust Estimation of the Reliability Function for a Series System under the Fréchet–Weibull Distribution with Contaminated Data

1) Asst. Prof. Dr. Ali Nasser Hussein

2) Zahraa Nassir Sari

college of Administration and Economics Department of Statistics

University of Basrah

Abstract :

This study addresses the problem of estimating the reliability function of a cascade (series) system within the stress–strength model under the Fréchet–Weibull distribution in the presence of outliers or extreme values in the data. Such outliers adversely affect the accuracy of traditional estimation methods, particularly the Maximum Likelihood Estimation (MLE), which necessitates the adoption of robust estimation approaches.

To tackle this issue, a model based on the concept of mixture distributions is proposed, where the statistical population is assumed to consist of a mixture of two subpopulations: one representing the original data and the other representing the outlying observations. Each subpopulation follows a Weibull distribution for the strength variable and a Fréchet distribution for the stress variable, but with different parameter values. The performance of the Mixture-based Estimation method (MXE) is compared with that of the conventional Maximum Likelihood Estimation (MLE). The study relies on Monte Carlo simulation to generate contaminated data with different contamination levels and varying sample sizes, including small, moderate, and large samples (n = 25, 50, 150). The performance of both methods is evaluated using the Mean Squared Error (MSE) criterion.

The results demonstrate the superiority of the Mixture-based Estimation method (MXE) in producing more accurate estimators that are less sensitive to outliers, particularly for small and moderate sample sizes (n = 25, 50). In contrast, the Maximum Likelihood Estimation (MLE) shows improved accuracy as the sample size increases (n = 150). The study concludes that employing a mixture distribution model combined with maximum likelihood estimation provides a robust and effective approach for estimating the reliability of complex cascade systems in non-ideal data environments. This contributes to improved reliability assessment and decision-making in engineering and industrial applications.

Keywords: Reliability, Series (Cascade) System, Stress–Strength Model, Mixture Distributions, Robust Estimation.

مقدمة :

تُعدّ دراسة المعولية من الموضوعات الحيوية في مجالات الهندسة والإحصاء، لما لها من دورٍ مهم في تقييم أداء الأنظمة وقدرتها على الاستمرار بالعمل دون فشل. ويعتمد تحليل المعولية بصورة واسعة على نماذج الأجهاد–المتانة (Stress–Strength) التي تُستخدم لوصف العلاقة بين الإجهاد المسلط على المكوّن وبين متانته. ويُعدّ نظام التتابعي (Cascade) من الأنظمة التي توفر تعزيزًا لمعولية النظام من خلال وجود عدد من المكونات الاحتياطية التي تتولى العمل عند فشل المكون الأول، مع خفض مقدار الإجهاد على المكونات اللاحقة.

ومن جهة أخرى، فإن طرائق التقدير الإحصائية في تقدير دالة المعولية قد تؤدي تقديرات غير دقيقة عند وجود قيَم شاذة أو متطرفة في البيانات، اذ يكون لهذه القيم تأثير كبير على دقة المقدرات تلك القيم الناتجة في الغالب لذلك اتجه الباحثون للبحث عن طرائق تعتمد على اوزان تحدد مسبقا الغاية منها تقليل تأثير القيمة الشاذة والمتطرفة .

وعلى فرض ان القيمة الشاذة تتبع توزيع مختلف عن توزيع بيانات العينة ، لذلك فان المجتمع في هذه الحالة عبارة عن خلط من مجتمعين جزئيين وبنسب مختلفة و لكل مجتمع توزيع معين

تتناول هذه الدراسة المقارنة بين طريقة الإمكان الأعظم وطريقة مقترحة تفترض ان بيانات القيم الشاذة لبيانات الاجهاد والمتانة تتبع توزيع يختلف عن توزيع المشاهدات العينة الاصلية لتقدير دالة المعولية لنظام Cascade لتوزيع فرجت–ويبل (Fréchet–Weibull) لكلٍّ من المتانة والإجهاد، من خلال استعمال محاكاة مونت كارلو (Monte Carlo Simulation) لتوليد البيانات، مع إدخال نسب تلوث متفاوتة (قيم شاذة) عبر أحجام عينات مختلفة ،$(n = 25)$ ،$(n = 150)$ ،$(n = 50)$. تم تقييم أداء الطريقتين باستخدام مقياس متوسط مربع الخطأ (Mean Squared Error - MSE).

من نتائج المحاكاة تم استنتاج ان طريقة التوزيعات المختلطة(MXE) تنتج مقدرات اكثر دقة من طريقة الإمكان الأعظم بشكل عام في معظم العيّنات الصغيرة والمتوسطة $(\boldsymbol{n = 25, n = 50})$، في المقابل، تحسنت كفاءة طريقة الإمكان الأعظم التقليدية (MLE) في العديد من حالات العيّنات الكبيرة ،$(\boldsymbol{n = 150})$ خاصة.

المبحث الأول: منهجية البحث

1. مشكلة البحث :

تتمثل مشكلة البحث في أن طرق التقدير التقليدية لا تُعطي تقديرات دقيقة لمعلمات نماذج الاجهاد-المتانة عند وجود قيَم شاذة أو متطرفة في البيانات، إذ تؤثر هذه القيم بشكل كبير على تقديرات المعولية ومن ثمّ على تقدير معولية النظام، خصوصًا في الأنظمة التي تعتمد على انتقال العمل بين المكونات مثل نظام Cascade. وللحصول على تقديرات دقيقة يجب استعمال طرق حصينة حيث ان المقدرات الناتجة تكون اقل تاثر بالقيم الشاذة ومن هنا تبرز المشكلة الرئيسة في السؤال الآتي:

كيف يمكن تقدير معولية نظام Cascade المعتمد على توزيع فرجت–ويبل لمتغيري المتانة والإجهاد في حالة وجود قيم شاذة او متطرفة في البيانات.

2. هدف البحث

يهدف هذا البحث إلى:

1. دراسة النظام (Cascade) لنموذج الأجهاد–المتانة المعتمد على توزيع Fréchet–Weibull.
2. اشتقاق دوال المعولية الحدّية ومعولية النظام بالكامل لنموذج (Cascade-3).
3. تقدير معلمات نموذج الاجهاد-المتانة باستخدام طريقة الإمكان الأعظم الحصين لمعالجة تأثير القيَم الشاذة.
4. اعتماد نموذج التوزيعات مختلطة (Mixture Distributions) لتمثيل البيانات الأصلية والمتطرفة بدقة أعلى وتحسين تقدير المعولية.

المبحث الثاني: الجانب النظري

1 المعولية Reliability

تعرف المعولية بأنها احتمال بقاء النظام (المكون) قيد العمل خلال فترة زمنية $[0, t]$ ويمثل منحنى دالة المعولية منحنى موجب رتيب متناقصاً ومستمراً ، وتعد من اكثر الدوال استعمالاً في وصف ودراسة الأنظمة والمعدات في المجالات الصناعية والهندسية وغيرها، اذا كان (T) متغير عشوائي يمثل زمن الفشل فأن دالة المعولية $R(t)$ تعطى بـ

$$R(t) = P_r(T > t) \qquad ; t \geq 0$$

$$R(t) = 1 - F(t) \quad \ldots.1$$

t : الزمن

$F(t)$:التراكمي التوزيع دالة

2.النظام التتابعي (cascade) للأجهاد والمتانه

يعد النظام التتابعي (cascade) حالة خاصة من النظام الاحتياطي (standby redundancy) لنموذج المتانة والأجهاد ,إذ يعرف الأجهاد Stress بأنه مقدارالقوة المسلطة لحدوث توقف المكون(component) عن العمل أو توقف النظام ,إما المتانة Strength فيقصد بها مقاومة المكون لأنجاز العمل المطلوب من دون توقف أو عطل ,ومن فرضيات هذا النظام احتوائه على (n) من مكونات يعمل منها مكون واحد فقط تحت تأثير الأجهاد في حين يوجد (n-1) من مكونات الباقية في وضع الاستعداد(standby) ,عند توقف المكون الأول نتيجة الأجهاد الكبير المسلط علية الذي يفوق متانة هذا المكون يقوم احد المكونات الذي في حال انتظار بالعمل مكان المكون العاطل ويعمل في نفس الظروف التي فشل بها المكون الأول, حيث يتم تحفيض الإجهاد على هذا المكون وذلك من خلال عامل التوهين(Attenuation factor)ويرمز له بالرمز(K) ,ويعمل عامل التوهين على تحسين عمل المكون الثاني إذ يقوم بتحفيض الإجهاد , وبفضل وجود هذا العامل يجعل نظام (cascade) حالة خاصة من النظام الاحتياطي, إن عامل التوهين للمكون الأول يساوي واحد(K=1) وبصورة عامة

$$y_2 = Ky_1, \qquad y_3 = Ky_2 = K^2y_1 \ldots . y_i = K^{i-1}y_1$$

$$y_i = Ky_{i-1} = K^*y_1 \qquad ; K^* = K^{i-1} \quad , i = 1,2, \ldots.$$

K:عامل التوهين

إن نظام (*cascade*) ما هو إلا أسلوب لزيادة معولية النظام, ,يتوقف النظام إذا يتوقف جميع مكوناته نتيجه الإجهاد المفروض عليه . ويعمل نظام (*cascade*)من خلال مكون واحد أو مكونات متعدده فعند العمل بنظام مكون واحد يتم تشغيل مكون واحد ليواجه الإجهاد وبقاء (*n-1*) من المكونات في وضع الاستعداد وهذا لنظام يسمى *cascade(1+1)*. إما العمل في مكونات متعددة وذلك من خلال تشغيل مكونين والمكون الثالث يكون في وضع الاستعداد وهذا النظام يسمى

cascade(2+1) وهذا النظام هو حالة خاصة من نظام *cascade(1+1)*. وفي هذه البحث سوف نستعمل نظام (1+1) *cascade* لتوزيع ويبل-فرجت ذو المعلمتين لكل من المتانة و الاجهاد وعلى فرض ان هذه المتغيرات مستقلة.

3. النموذج الرياضي العام Model General Mathematical

يفترض أن Xمتغير عشوائي يمثل متانة (Strength) ويفرض أن Yمتغير عشوائي يمثل الأجهاد (Stress), إذن معولية النظام في هذه الحالة تكون كلأتي:

$$R = P_r\,(x > y)$$

$$R = \int_{y=0}^{\infty} \left(\int_{x=y}^{\infty} f(x)dx \right) g(y)dy \qquad \ldots.2$$

إذ إن $f(x); g(x)$ يمثلان الدالة الكثافة الاحتمالية probability density function لمتغيري الاجهاد و المتانة. على فرض أن $x_1, x_2, \ldots., x_n$ تمثل متغيرات المتانه (Strength) للمكونات حسب الترتيب $C_1, C_2, \ldots, C_n$ وهي متغيرات عشوائية مستقلة بدالة كثافة احتمالية pdf $f_i(x_i) \;\; ; i = 1,2, \ldots n$ وان $y_1; y_2; \ldots.. y_m$ يمثل الاجهاد(Stress) المسلط على المكونات وهي متغيرات عشوائية مستقلة ولها دالة كثافة احتماليه $g_i(y_i) \;\; ; i =$ $1,2, \ldots., n$ فإذا كان $(x_1 \geq y_1)$ فأن المكون الأول C_1 يعمل والنظام يعمل, وإذا كان $(x_1 < y_1)$ يؤدي الى عطل (توقف) المكون C_1 ثم المكون الثاني C_2 يأخذ مكانه مع متانة x_2 وبما أن النظام فقد مكون واحد إلا أنه يستمر بالعمل أذا$(x_2 \geq y_2)$ وأن الصيغه الرياضية لمعولية نظام التتابعي (cascade) هي :

$$R_i = \sum_{i=1}^{n} R(i) \qquad \ldots 3$$

$R(i)$ تمثل المعولية الحدية للمكون (i)

Ri تمثل المعولية النظام

ان دالة المعولية الحدية $R(n)$ للمكون n^{th} تحسب كالاتي:

$$R(n) = p\left[\left\{\bigcap_{i=1}^{n-1}(x_i < y_i)\right\}\bigcap(x_n \geq y_n)\right] \qquad \dots 4$$

وعلية تكون معولية النظام (n-cascade) هي عبارة عن مجموع المعوليات الحدية : $R(i)$

$$R_n = R(1) + R(2) + \cdots + R(n)$$

4. طريقة الإمكان الأعظم *maximum likelihood methods*

عرض العالم فشر عام 1920 أحد رواد الإحصاء في القرن العشرين طريقة أكثر انتشارا في الإحصاء لتقدير المعلمات للتوزيع الاحتمالي المقترح وتهدف الى جعل دالة الإمكان للمتغيرات العشوائية أعظم ما يمكن وأنها كافية وغير متحيزة كما تتميز أيضا بدقتها مقارنة مع طرائق التقدير الأخرى ولاسيما عند زيادة حجم العينة وللحصول على تقديرات دالة المعولية لتوزيع التتابعي ويبل – فرجت يتم عن طريق الحصول لوغاريتم دالة الاحتمالية المشتركة وصيغتها العامة كالاتي:

$$\mathcal{L} = nln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + nln\left(\frac{\lambda}{\theta}\right) + (\alpha - 1)\left(\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)\right) - (\lambda + 1)\left(\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{y_i}{\theta}\right)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\theta}\right)^{-\lambda}\right) \qquad \dots\dots\dots 5$$

ولإيجاد تقدير المعالم سيتم إيجاد المشتقة الجزئية للوغريتم دالة الإمكان بالنسبة للمعالم مجهولة وكما يأتي

مشتقة لوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة للمعلمة α

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)\right) \qquad \dots\dots 6$$

وان مشتقة دالة الإمكان بالنسبة للمعلمة β هي

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = -\frac{n}{\beta} - \frac{n(\alpha-1)}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\sum\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\alpha} \qquad \dots\dots\dots 7$$

وان مشتقة دالة الإمكان بالنسبة للمعلمة λهي

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \left(\sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{y_i}{\theta}\right)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\left(\frac{y_i}{\theta}\right)^{-\lambda} ln\left(\frac{y_i}{\theta}\right)\right)\right) \qquad \dots\dots\dots 8$$

وان مشتقة دالة الإمكان بالنسبة للمعلمة θهي

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} - \frac{(\lambda-1)n}{\theta} - \left(\frac{\lambda}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{\theta}\right)^{\lambda}\right) \qquad \dots\dots 9$$

ان المعادلات(6) –(9) تمثل منظومة من المعادلات الرياضية غير الخطية ولحل هذه المنظومة سيتم استخدام الطرق العددية.

5.طريقة الإمكان الأعظم مع التوزيعات الإحصائية المختلطة Mixture distribution

في هذه الطريقة يكون المجتمع مكون من مجتمعين جزئيين المجتمع الجزئي الأول يتضمن مشاهدات المتانة والاجهاد التي تتبع توزيع فرجت – ويبل اما المجتمع الجزئي الثاني فيتضمن بيانات الاجهاد والمتانة فرجت – ويبل للقيم الشاذة والمتطرفة ويحدد كل مجتمع بحسب نسبة من المجتمع الأصلي ، وفي هذه الحالة يكون التوزيع الاحتمالي لمشاهدات المتانة عبارة عن توزيع مختلط لتوزيع فرجت – فرجت وبمعالمات مختلفة أي ان توزيع المتانة سكون

$$f(x;\alpha_1;\beta_1;\alpha_2;\beta_2) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{-(\alpha-1)}\left(\frac{x}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2+1)} e^{-\left(\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{-\alpha_1}+\left(\frac{x}{\beta_2}\right)^{-\alpha_2}\right)}$$

وان توزيع الاحتمالي لمشاهدات الاجهاد عبارة عن توزيع مختلط لتوزيع ويبل – ويبل وبمعالمات مختلفة وكما يلي

$$g(y)=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\theta_1\theta_2}\left(\frac{y}{\theta_1}\right)^{\lambda_1-1}\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\lambda_2-1}e^{-\left(\left(\frac{y}{\theta_1}\right)^{\lambda_1}+\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\lambda_2}\right)}$$

اذ ان

$$f(y;\lambda;\theta)=\frac{\lambda y^{\lambda-1}e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)^{\lambda}}}{\theta^{\lambda}}$$

$$q_1+q_2=1$$

$$q_2=1-q_1$$

$$f(y;\lambda_1;\theta_1;\lambda_2\theta_2;q)$$

$$=\frac{q_1\lambda_1 y^{\lambda_1-1}e^{-\left(\frac{y}{\theta_1}\right)^{\lambda_1}}}{\theta_1^{\lambda_1}}+\frac{(1-q_1)\lambda_2 y^{\lambda_2-1}e^{-\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\theta_2}}}{\theta_2^{\lambda_2}} \qquad \ldots 10$$

توزيع المتانة

$$f(x;\alpha;\beta)=\alpha\beta^{\alpha}x^{-\alpha+1}e^{-\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha}}$$

$$f(x;\alpha_1;\beta_1;\alpha_2;\beta_2;p)=$$

$$p_1\alpha_1\beta_1^{\alpha_1}x^{-\alpha_1+1}e^{-\left(\frac{y}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}+(1-p_1)\alpha_2\beta_2^{\alpha_2}x^{-\alpha_2+1}e^{-\left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}} \qquad \ldots\ldots\ldots 11\text{-}2)$$

توزيع المتانة - الاجهاد

$$f(x;y;\alpha_1;\beta_1;\alpha_2;\beta_2;\lambda_1;\theta_2;\lambda_2;\theta_2;q;p)$$

$$=\left(\frac{q\lambda_1 y^{\lambda_1-1}e^{-\left(\frac{y}{\theta_1}\right)^{\lambda_1}}}{\theta_1^{\lambda_1}}+\frac{(1-q)\lambda_2 y^{\lambda_2-1}e^{-\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\lambda_2}}}{\theta_2^{\lambda_2}}\right)$$

$$*\left(p_1\alpha_1\beta_1^{\alpha_1}x^{-\alpha_1+1}e^{-\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}\right.$$

$$\left.+(1-p_1)\alpha_2\beta_2^{\alpha_2}x^{-\alpha_2+1}e^{-\left(\frac{x}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{q_1\lambda_1 y^{\lambda_1-1}e^{-\left(\frac{y}{\theta_1}\right)^{\lambda_1}}}{\theta_1^{\lambda_1}}+\frac{(1-q_1)\lambda_2 y^{\lambda_2-1}e^{-\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\lambda_2}}}{\theta_2^{\lambda_2}}\right)\left(p_1\alpha_1\beta_1^{\alpha_1}x^{-\alpha_1+1}e^{-\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.(1-p_1)\alpha_2\beta_2^{\alpha_2}x^{-\alpha_2+1}e^{-\left(\frac{x}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right] \qquad \dots\dots\dots 12$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\theta_1^{\lambda_1}\theta_2^{\lambda_2}}\left[\left(-\alpha_2\beta_2^{\alpha_2}x^{-\alpha_2-1}(-1+p_1)e^{-\left(\frac{x}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}+p_1\alpha_1\beta_1^{\alpha_1}x^{-\alpha_1+1}e^{-\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}\right)\left(-\lambda_2 y^{\lambda_2-1}\theta_1^{\lambda_1}(1-q_1)e^{-\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\lambda_2}}+q_1\lambda_1 y^{\lambda_1-1}e^{-\left(\frac{y}{\theta_1}\right)^{\lambda_1}}\theta_2^{\lambda_2}\right)\right]\theta_1^{\lambda_1}\theta_2^{\lambda_2}\right)}{\left(-\lambda_2 y^{\lambda_2-1}\theta_1^{\lambda_1}(-1+q_1)e^{-\left(\frac{y}{\theta_2}\right)^{\lambda_2}}+q_1\lambda_1 y^{\lambda_1-1}e^{-\left(\frac{y}{\theta_1}\right)^{\lambda_1}}\theta_2^{\lambda_2}\right)\left(-\alpha_2\beta_2^{\alpha_2}x^{-\alpha_2+1}(-1+p_1)e^{-\left(\frac{x}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}+p_1\alpha_1\beta_1^{\alpha_1}x^{-\alpha_1+1}e^{-\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}\right)}$$

وتفترض هذه الطريقة ان السلوك العشوائي للقيم الشاذة *(Outler Data)* يختلف عن البيانات الاصلية اذ تفترض هذه الطريقة ان توزيع القيم الشاذة لبيانات المتانة *(Strength Data)* هو توزيع فرجت *(Fréchet distribution)* لكن بمعالم تختلف عن التوزيع الأصلي وبنسبة معينة كما ان توزيع القيم الشاذة لبيانات الاجهاد *(Stress data)* يسلك سلوك عشوائي وفق توزيع ويبل *(Weibull distribution)* بمعالم تختلف عن توزيع البيانات الاصلية، ووفق هذه الافتراضات فان بيانات المتانة تتوزع وفق توزيع فرجت المختلط *(Mixture Fréchet)* وكما يلي:

$$f(x_1;x_2;\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$$

$$=P\frac{\alpha_1}{\beta_1}\left(\frac{x_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1-1}e^{-\left(\frac{x_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}+(1-P)\frac{\alpha_2}{\beta_2}\left(\frac{x_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2-1}e^{+\left(\frac{x_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}$$

وان دالة الاجهاد يسلك سلوك عشوائي وفق توزيع ويبل المختلط *(Mixture Weibull)* وكما يلي:

$$g(y_1;y_2;\lambda_1;\theta_1;\lambda_2;\theta_2) = q\frac{\lambda_1}{\theta_1}\left(\frac{y_1}{\theta_1}\right)^{-\lambda_1-1} e^{-\left(\frac{y_1}{\theta_1}\right)^{-\lambda_1}} + (1-q)\frac{\lambda_2}{\theta_2}\left(\frac{y_2}{\theta_2}\right)^{-\lambda_2-1} e^{-\left(\frac{y_2}{\theta_2}\right)^{-\lambda^2}}$$

.....13

ان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع التتابعي (Cascade) لنظام الاجهاد – المتانة (Fréchet- Weibull) تكون كما مبين في ادناه

$$f(x_1;x_2;y_1;y_2) = \left(P\frac{\alpha_1}{\beta_1}\left(\frac{x_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1-1} e^{-\left(\frac{x_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}} + (1-P)\frac{\alpha_2}{\beta_2}\left(\frac{x_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2-1} e^{+\left(\frac{x_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\left(q\frac{\lambda_1}{\theta_1}\left(\frac{y_1}{\theta_1}\right)^{-\lambda_1-1} e^{-\left(\frac{y_1}{\theta_1}\right)^{-\lambda_1}} + (1-q)\frac{\lambda_2}{\theta_2}\left(\frac{y_2}{\theta_2}\right)^{-\lambda_2-1} e^{-\left(\frac{y_2}{\theta_2}\right)^{-\lambda^2}}\right)$$

.....14

وبأخذln و المجموع للمعادلة أعلاه نحصل على

$$\ell = ln\, f(x_1; x_2; y_1; y_2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} ln\left(P\frac{\alpha_1}{\beta_1}\left(\frac{x_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1-1} e^{-\left(\frac{x_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}} \right.$$
$$\left. + (1-P)\frac{\alpha_2}{\beta_2}\left(\frac{x_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2-1} e^{+\left(\frac{x_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}} \right)$$
$$+ ln\left(q\frac{\lambda_1}{\theta_1}\left(\frac{y_1}{\theta_1}\right)^{-\lambda_1-1} e^{-\left(\frac{y_1}{\theta_1}\right)^{-\lambda_1}} \right.$$
$$\left. + (1-q)\frac{\lambda_2}{\theta_2}\left(\frac{y_2}{\theta_2}\right)^{-\lambda_2-1} e^{-\left(\frac{y_2}{\theta_2}\right)^{-\lambda^2}} \right)$$

ثم نأخذ المشتقة

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{np\alpha_1\left(\frac{x_1}{\beta_1}\right)^{-\alpha_1-1}\left(\frac{x1}{\beta_1}\right)^{-\alpha_1}\ln\left(\frac{x1}{\beta_1}\right)e^{-\left(\frac{x1}{\beta_1}\right)^{-\alpha_1}}}{\beta_1\left(p\alpha_1\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{-\alpha_1-1}\frac{e^{-\left(\frac{x1}{\beta_1}\right)^{-\alpha_1}}}{\beta_1} + (1-p)\alpha_2\left(\frac{x2}{\beta_2}\right)^{-\alpha_2-1}\frac{e^{-\left(\frac{x2}{\beta_2}\right)^{-\alpha_1}}}{\beta_2}\right)}$$

.....15

المبحث الثالث: الجانب العملي

وصف تجارب المحاكاة للنظام التتابعي cascade :

في هذا الفصل سيتم استخدام محاكاة مونتي-كارلو(Simulation Monté Carlo) لتوليد بيانات بأحجام مختلفة تُستخدم في تقدير دالة المعولية لنظام التتابع الإجهاد-المتانة .كما سيتم إجراء مقارنة بين المقدرات لتقييم دالة المعولية لهذا النظام من خلال مراحل متعددة: اذ تم اختيار احجام العينات (Sample Sizes) صغير **(25) متوسط (,50) كبير(150)** وتم اختيار قيم افتراضية لمعلمة الشكل λ(shape parameter) ومعلمة القياس γ (scale parameter) لمتغير المتانة لتوزيع ويبل وايضاً معلمة الشكل α (shape parameter) ومعلمة القياس β (scale parameter) لمتغير الاجهاد لتوزيع فرجت .

يتم تحديد القيم الافتراضية لأحجام العينات بالإضافة إلى تحديد القيم الافتراضية لمعلمات النموذج التتابعي.

اختيارقيم افتراضية لمعلمات النظام التتابعي لتوزيع فرجت-ويبل

Choosing Hypothesis Values of Parameters

يتم اختيار قيم افتراضية لمعلمة الشكل λ(shape parameter) ومعلمة القياس γ(scale parameter) لمتغيرالاجهاد لتوزيع ويبل وايضاً معلمة الشكل α (shape parameter) ومعلمة القياس β (scale parameter) لمتغير المتانة لتوزيع فرجت .

Model	α	β	γ	λ	p	q
Model1	1.5	2	2	2	0.10	0.10
Model2	1.5	2	2	2	0.30	0.10
Model3	0.8	1	2.5	3.0	0.10	0.20

جدول 1 يمثل القيم الافتراضية المختارة لتوزيع فرجت-ويبل

تم استعمال لغة البرمجة Matlab توليد بيانات لدالة المعولية , يتم تقدير معولية النظام التتابعي (cascade) لتوزيع فرجت-ويبل بأستعمال طرق التقدير طريقة مقدر الأمكان الأعظم MlM لمعولية النظام التتابعي (cascade), وطريقة

تقدير الإمكان الأعظم للتوزيعات المختلطة MXE لمعولية النظام التتابعي (cascade) ونختار الطريقة المثلى من خلال إجراء مقارنة بين التقديرات اعتماداً على المقياس الإحصائي متوسط مربع الخطأ (MSE).

مناقشة تجارب المحاكاة الخاصة بنظام cascade :

للوصول إلى الطريقة المثلى لتقدير معولية نظام التتابع لتوزيع فرجت-ويبل، تم الاعتماد على المقياس الإحصائي لمتوسط مربع الخطأ.(MSE) وفيما يلي تُعرض نتائج تجارب المحاكاة بناءً على القيم الافتراضية المختارة وأحجام العينات، كما هو موضح في الجدول التالي :

	MLM			MXE			Best	Best	Best
n	$MSE\ R(1)$	$MSE\ R(2)$	$MSE\ R(3)$	$MSE\ R(1)$	$MSE\ R(2)$	$MSE\ R(3)$	$R(1)$	$R(2)$	$R(3)$
25	1.089501	0.051374	0.051374	1.070882	0.053757	0.053757	MxE	MxE	MxE
50	0.209192	0.051355	0.051355	0.159063	0.032083	0.032083	MXE	MXE	MXE
150	0.052646	0.055130	0.055130	0.162810	0.044659	0.044659	MLM	MXE	MXE

جدول (2):يمثل قيمة MSE لتقدير دالة المعولية للنظام التتابعي (لثلاث مكونات) لطريقة الإمكان الاعظم $(\alpha =$

	MLM			MXE			Best	Best	Best
n	$MSE\ R(1)$	$MSE\ R(2)$	$MSE\ R(3)$	$MSE\ R(1)$	$MSE\ R(2)$	$MSE\ R(3)$	$R(1)$	$R(2)$	$R(3)$
25	1.08950	0.14550	0.14550	1.07088	0.74218	0.74218	MXE	MXE	MXE
50	0.20919	0.14527	0.14527	0.15906	0.09775	0.09775	MXE	MXE	MXE
150	0.05265	0.19813	0.19813	0.16281	0.15641	0.15641	MLM	MXE	MXE

جدول(3) يمثل قيمة MSE لتقدير دالة المعولية للنظام التتابعي (لثلاث مكونات) لطريقة الإمكان الاعظم

$$(\alpha = 1.5;\ \beta = 2;\ \gamma = 2; \lambda = 2\ ; p = 0.30\ ; q = 0.10)$$

	MLM			MXE			Best	Best	Best
n	$MSE\ R(1)$	$MSE\ R(2)$	$MSE\ R(3)$	$MSE\ R(1)$	$MSE\ R(2)$	$MSE\ R(3)$	$R(1)$	$R(2)$	$R(3)$
25	1.08950	0.18822	0.18822	1.07088	0.25333	0.25333	MXE	MXE	MXE
50	0.79602	0.15503	0.15503	0.15906	0.10331	0.10331	MXE	MXE	MXE

150	0.16281	0.20199	0.20199	0.10180	0.15906	0.15906	MLM	MXE	MXE

جدول(4) يمثل قيمة MSE لتقدير دالة المعولية للنظام التتابعي (لثلاث مكونات) لطريقة الإمكان الاعظم

$$(\alpha = 0.8;\ \beta = 1;\ \gamma = 2.5;\ \lambda = 3.0;\ p = 0.10\ ;q = 0.20)$$

ومن النتائج أعلاه تبين ان طريقة تقدير التوزيعات المختلطة MXE هي الأفضل عندما تكون احجام العينة

(n=50, n=25) وعندما تكون حجم العينة (n=150) تعد طريقة التوزيعات المختلطة MXEهي الأفضل وبعض الأحيان تكون طريقة الإمكان الأعظم الاعتياديML E.

المبحث الرابع: الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات:

1. **فعالية النموذج المقترح** :أظهر النموذج القائم على نظام Cascade لتوزيع Fréchet–Weibull مع استخدام التوزيعات المختلطة والتقدير الحصين (Robust MLE) قدرة عالية على تقدير معولية النظام في وجود قيم شاذة، مما يقلل من تأثيرها على دقة التقديرات.
2. **تحسن الدقة مع زيادة حجم العينة** :من خلال نتائج محاكاة مونتي كارلو، لوحظ أن زيادة حجم العينة يؤدي إلى تحسن في دقة تقدير المعولية، حيث انخفضت قيم MSE كلما زاد حجم العينة (من 25 إلى 150).
3. **تفوق نظام Cascade في تحسين المعولية** :النظام التتابعي (Cascade) يوفر تحسناً ملحوظاً في معولية النظام من خلال الاستخدام المتتالي للمكونات الاحتياطية مع تخفيف الإجهاد عبر عامل التوهين(K) ، مما يطيل عمر النظام ويقلل فرص الفشل الكلي.
4. **كفاءة التوزيعات المختلطة في تمثيل البيانات** :أثبت استخدام التوزيعات المختلطة (Mixture Distributions) لكلا من المتانة والإجهاد قدرته على تمثيل البيانات الأصلية والقيم المتطرفة بشكل أفضل من النماذج التقليدية ذات التوزيع الواحد.
5. **إمكانية تعميم النموذج** :النموذج المقترح يمكن تعميمه على أنظمة متعددة المكونات وأنواع توزيعات أخرى، مما يوسع من نطاق تطبيقه في مجالات الهندسة والموثوقية.

التوصيات

1. **تطبيق النموذج على أنظمة أكثر تعقيداً** :يُوصى بتطبيق النموذج المقترح على أنظمة ذات عدد أكبر من المكونات ($n > 3$) ودراسة تأثير ذلك على المعولية والتكاليف.
2. **دراسة عامل التوهين بشكل تفصيلي** :يُقترح إجراء دراسات إضافية لتحليل تأثير عامل التوهين (K) وقيمته المثلى تحت ظروف تشغيل مختلفة لتعزيز كفاءة النظام.
3. **مقارنة طرق تقدير بديلة** :يُوصى بمقارنة طريقة الإمكان الأعظم الحصين مع طرق تقدير أخرى مثل Bayesian Estimationأو طرق التحمل (Tolerance Limits) لتقييم الأداء النسبي في وجود قيم شاذة.
4. **تطوير برمجيات متخصصة** :يُقترح تطوير حزم برمجية أو أدوات محاكاة تفاعلية لتسهيل تطبيق النموذج المقترح في التطبيقات الصناعية والهندسية.
5. **توسيع نطاق التطبيقات العملية** :يُوصى بتطبيق النموذج على بيانات حقيقية من قطاعات مثل الطاقة والاتصالات والصناعات التحويلية، لاختبار فعاليته في سياقات عملية متنوعة.

المصادر:

اولا : المصادر العربية

1)البياتي، خضر نصيف جاسم (2012)، **"مقارنة طرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع الأسي الخليط باستعمال أسلوب المحاكاة"**، أطروحة دكتوراه، قسم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة البصرة.

2)حسين، علي ناصر (2015)، **"إيجاد الخوارزمية الكفوءة في تقدير معلمات توزيع ويبل المختلط (تطبيق على سرعة الرياح في العراق)"**، أطروحة دكتوراه (غير منشورة)، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

3)السعيداوي، جواد شاكر ضغيم (2022)، **"معولية النظام التتابعي المضبب لتوزيع فرجت-ويبل"**، رسالة ماجستير، كلية الإدارة والاقتصاد، قسم الإحصاء، جامعة البصرة.

4)شواي، رغد خليل (2024)، **"تقدير معلمات توزيع القيم المتطرفة المعممة الموسع مع التطبيق على درجات الحرارة في العراق"**، رسالة ماجستير، جامعة البصرة.

5)عبد اللطيف، زهراء رياض (2021)، **"تقدير دالة المعولية لبيانات توزيع Shifted Gompertz مع تطبيق عملي"**، رسالة ماجستير (غير منشورة)، قسم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة البصرة.

6)العبيدي، سناء علي محمد (2019)، **"تقدير معولية نظام Cascade الاعتماد–المعالجة لتوزيع احتمالي"**، رسالة ماجستير، قسم الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة كربلاء.

7)عبد الحسين، غفران خالد، وريسّان عبد الإمام زعلان (2022)، **"تقدير معلمات ودالة البقاء لتوزيع مختلط مقترح باستعمال بعض طرائق التقدير من خلال المحاكاة"**، مجلة الإحصائي الخليجي، العدد 54، ص 241.

8)موجان، هاجر عبد الحسن، وقاسم، بهاء عبد الرزاق (2022)، **"تقدير دالتي المعولية والمخاطرة للتوزيع الاحتمالي الموسع (MOElkum) مع التطبيق"**، مجلة الإحصائي الخليجي، العدد 53، ص 87.

ثانيا: المصادر الأجنبية

1)Elmahdy, E. E. (2017). **"Modelling reliability data with finite Weibull or lognormal mixture distributions"**. Applied Mathematics & Information Sciences, 11(4), 1081–1089. http://dx.doi.org/10.18576/amis/110414

2)Ghojogh, B., Ghojogh, A., Crowley, M., & Karray, F. (2020). **"Fitting a mixture distribution to data"**: Tutorial. arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.1901.06708

3)Hussein, A. N., & Nea'ama, M. W. (2020). **"Cascade system reliability for Weibull-Fréchet distribution"**.

4)Hussein, A. N. (2020). **"Estimate reliability function of inverse Lindley for strength-stress models"**. Journal of Al-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics, 12(4), 61–70

5)Kadem, H. H., & Karam, N. S. (2020). **"Cascade stress-strength system reliability estimation of inverse Rayleigh distribution"**. Journal of Advanced Sciences and Engineering Technologies, 3(2), 9–19.

6)Khan, A. H., & Jan, T. R. (2014). **"Estimation of multi component systems reliability in stress-strength models"**. Journal of Modern Applied Statistical Methods, 13(2), 389–398. http://dx.doi.org/10.22237/jmasm/1414815600

7)Razali, A. M., & Salih, A. A. (2009). **"Combining two Weibull distributions using a mixing parameter"**. European Journal of Scientific Research, 31(2), 296–305.

8)Raheem, S. H. (2020). **"Comparison among three estimation methods to estimate cascade reliability model (2+1) based on inverted exponential distribution"**. Ibn Al-Haitham Journal for Pure and Applied Science, 33(4), 163–172. https://doi.org/10.30526/33.4.2530