مفاهيم وسائل رياضية عربية اسلامية

أ.د. خضير عباس المنشداوي
دكتوراه في تاريخ الرياضيات
أستاذ تاريخ العلم / جامعة زاخو
Kama981@yahoo.com

خلاصة البحث:

احتلت الرياضيات العربية الإسلامية احتلت مركز الصدارة في السلم الحضاري العالمي وتركت الأثر الواضح في مختلف مجالات المعرفة وخاصة الرياضيات منها، وقد أشاد اغلب مؤرخي العلم ورجاله على أهمية الفكر الرياضي العربي الإسلامي وذلك لإصالة النظريات والقوانين والمفاهيم والمسائل الرياضية في مختلف مجالات تلك العلوم وهي الحساب والجبر والمثلثات والهندسة وأصبحت تلك النظريات والمسائل الأساس الأول لتقدم الفكر والمعرفة الرياضية ليس عند العرب والمسلمين وانما على مستوى العالم بأكمله ومن تلك الإنجازات الرياضية الأرقام ونظام الترقيم العشري تلك الأرقام وذلك النظام الذي يُستخدم الان في مشارق الأرض ومغاربها.

وفي هذا البحث وضمن تخصصنا تطرقنا الى ذلك مجموعة من تلك الأفكار والمسائل والنظريات الرياضية التي توصل لها علماء الرياضيات العرب والمسلمين على سبيل المثال وليس الحصر ومنها : الصفر والوضع المكاني للأعداد، الأعداد السالبة ،خاصية التوزيع في الضرب، قانون ضرب الإشارات ،العنصر المحايد في الضرب، الكسور العشرية وابتكار العرب والمسلمين للفاصلة العشرية، الاعداد التامة والزائدة والناقصة وقواعد ايجادها، الأعداد المتحابة وقاعدة ثابت بن قرة الحراني لإيجادها ،نظرية حساب الخطأين ،الحل العكسي للمسائل الحسابية. نظرية مجموع عددين مكعبين لا عدداً مكعباً.

ان الدقة والمنهج العلمي السلم الذي اتبعه علماء الرياضيات العرب والمسلمين إضافة الى عقليتهم التواقة للعلم والمعرفة هي التي قادت عملة الابداع في الفكر الرياضي وجعل الرياضيات العربية الإسلامية تحتل مكانا مرموقا ضمن سلم العلم والمعرفة.

الكلمات المفتاحية: رياضيات / تراث علمي/ حضارة

Summary:

Arab-Islamic mathematics has occupied the forefront of the global civilization ladder and left a clear impact in various fields of knowledge, especially mathematics, and most historians of science and its men have praised the importance of Arab-Islamic mathematical thought in order to authenticate theories, laws, concepts and mathematical issues in various fields of those sciences, namely arithmetic, algebra and triangles And engineering, and those theories and issues became the first basis for the progress of mathematical thought and knowledge not among Arabs and Muslims, but at the whole world level. Among these mathematical achievements are the numbers and the decimal numbering system those numbers and that system that is used now in the east and west of the earth.

In this research and within our specialization we dealt with a group of those ideas, questions and mathematical theories that Arab and Muslim mathematicians have reached, for example but not limited to, including: zero and the spatial position of numbers, negative numbers, the distribution property of multiplication, the law of sign multiplication, the neutral element in multiplication Decimal fractions, Arabs and Muslims inventing the decimal point, the perfect, plus and minus numbers and the rules for finding them, the mathematical numbers and the base of Thabit bin Qurra al-Harrani to find them, the theory of calculating the two errors, the inverse solution of arithmetic problems. The theory of the sum of two cubic numbers, not a cubic number.

The accuracy and scientific method of peace followed by Arab and Muslim mathematicians in addition to their mentality of eagerness for knowledge and knowledge is what led the creativity in mathematical thought and made Arab mathematics

Key words: mathematics / scientific heritage / civilization

المقدمة:

لقد احتلت الحضارة العربية الإسلامية مركز الصدارة في السلم الحضاري العالمي وتركت الأثر الواضح في مختلف مجالات المعرفة وخاصة الرياضية منها ، وقد أشاد أغلب مؤرخي العلم ورجاله على أهمية الحضارة العربية الإسلامية عامة وعلى اصالة الفكر الرياضي العربي وأثره على الفكر الرياضي الغربي ، فقد اكد سارتون على نضوج المعرفة العربية وأوضح بان العلماء العرب كانوا يتزعمون لواء الحركة العلمية بكل

جوانبها ، فقال بحقهم: (... إذا انزلناهم المنزلة الحقة من بيئتهم ووازنا بين الجهود العربية وبين العصر الوسيط فإن تفوق الجهد العربي الساحق يصبح حقيقة مائلة رائعة وعلينا ان نذكر انه من متصف القرن الثامن حتى أواخر القرن الحادي عشر كانت الشعوب التي تتكلم العربية تتقدم موكب الإنسانية)[1]. أما روم لاندو فبين بأن أثر العرب على الغرب لم يقتصر على علم دون آخر وأن معارف الغرب مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بما قدمه العرب والمسلمين ، فقال:(إن الحضارة الغربية ابتدأ من الفلسفة والرياضيات الى الطب والزراعة مدينة لتلك الحضارة بشيء كثير الى درجة نعجز معها عن فهم الحضارة الغربية إذا لم تتم لنا معرفة الحضارة العربية)[2].

لقد تقدمت الحضارة العربية الإسلامية بكل اتجاهاتها المختلفة ومنها المعرفة الرياضية حيث اثبت العرب والمسلمين اصالة فكرهم الرياضي من خلال أعمالهم التي اتسمت بالدقة والشمولية وهذا ما جعلها ان تترك الأثر الكبير على المعرفة الرياضية وحتى المعاصرة منها ، وقد اعترف كبار علماء الغرب بجدية الفكر الرياضي العربية واهميته ، فقد ذكر روم لاندو بأن هنالك صفتين أساسيتين للرياضيات العربية كانت في مقدمة الأسباب التي أدت بها ان تحتل ذلك الموقع العلمي المتقدم في سلم المعرفة ، حيث قال : (إذا أردنا ان نوجز قلنا إن الصفتين المتميزتين للرياضيات العربية هما شجاعة المشتغلين بها وحرية التفكير ... لقد كانوا تواقين دائماً الى وضع النظريات موضع الاختبار ولم يملوا التجربة في أيما يوم من الأيام)[3]. ثم انه عدد بعض أعمالهم الرياضية الرائدة والتي منها : (.... اصطناع الأرقام العربية والنظام العشري واختراع الجبر وفق مفهومه الحديث ووضع أسس حساب المثلثات وخاصة الكروية منها....)[4]. وذكر فؤاد سزكين ان للعرب والمسلمين المكانة المرموقة في تاريخ المعرفة الرياضية حيث انهم قد أتوا باعمال رائعة ، حيث قال : (إذا أردنا ان نعرف عمل الرياضيين العرب منذ بداية المرحلة الإبداعية مجملاً فيصح ان نقول إنهم أتوا بالبرهان على كثير مما عرضه الإغريق من مسائل ةقضايا رياضية دون برهان ، وأنهم صححوا مفاهيم رياضية كثيرة مما وجدوه عند الأسلاف وأنهم طوروا كل ما ورثوا عن الأسلاف، لعبوا دورهم في تاريخ الرياضيات كما فعلوا في جميع نواحي العلوم بشعور قوي إنهم مبدعون ويستطيعون ان يكونوا مبدعين)[5]. وأوضح جورج سارتون بأن: (أعظم الابتكارات العربية في الرياضيات والفلك كانت شيئين، علم الحساب الجديد، وعلم المثلثات الجديد)[6].

لقد تعددت المعرف الرياضية العربية الإسلامية فقد بحثوا بكل فروعها من حساب وجبر ومثلثات وهندسة إضافة الى دورهم الكبير في تطوير الأرقام واضافة الصفر وإيجاد النظام العشري تلك الأرقم التي تسمى الأن في مشارق الأرض ومغاربها بالأرقام العربية، وكون كافة الشعوب المعاصرة تستخدم الأن أيضا في معاملاتهم الرياضية ذلك النظام الذي اوجده العرب والمسلمين الا وهو النظام العشري.

كذلك في الكثير من أعمالهم ونظرياتهم الرياضية سبقوا الغرب بتلك الاعمال ومنها بحثهم في الكسور العشرية وإيجاد فاضلة الكسر العشري، وهم اول من بحثوا في الكسور

الاعتيادية وتصلوا الى ابتكار الخط الفاصل بين البسط والمقام ، ويرجع لهم الفضل في البحث في علم اللوغاريتمات وإيجاد النسب والقوانين الخاصة بذلك العلم،وهم اول من بحث في الأعداد السالبة وطبقوا مختلف العمليات الرياضية عليها ، كذلك يرجع لهم الفضل في التوصل بما يسمى بمثلث باسكال وانهم سبقوا باسكال بعدة قرون وكان الأدق علميا ان يسمى بمثلث الكرجي لكونه اول من توصل لذلك المثلث،وانهم اوجودوا فروعا رياضية جديدة ومنها الهندسة التحليلية وذلك باستعمال الحل الجبري للمسائل الهندسة والحل الهندسي للمسائل الجبرية، والعرب والمسلمين يرجع لهم الفضل في تأسيس علم المثلثات الكروية وإيجاد جميع نسبه المثلثية، كذلك هم اول من بحث في علم تسطيح الكره، وانهم اول من اثاروا الشكوك على هندسة اقليدس ومهدوا الامر لإيجاد هندسة أخرى وهي الهندسة اللا إقليدية، ولكن للأسف الشديد نُسبت تلك الهندسة الى علماء الغرب ومنهم نيكولاي لابوفسكي المتوفى سنة 1856م ،وجورج برنهاد ريمان المتوفى سنة 1866م، في علماء الرياضيات العرب والمسلمين قد سبقوا أولئك بعدة قرون من الزمن[7].

ونحن بهذا البحث الموجز سنذكر نماذج من الاعمال الرياضية التي ابدع بها علماء الرياضيات العرب والمسلمين ، ومن تلك الأعمال:

- **الصَّفْرُ والوضع المكاني للأعداد:**

كان للمسلمين الدور المهم والاساس في إيجاد نظام العشري حيث اخذوا فكرة الترقيم بالموز التسعة عن الهنود وقاموا بتهذيبها وتوحيدها وفق صيغتين رقميتين وذلك بعد إضافة الصفر لها وبذلك دخلت تلك الأرقام المفهوم العلمي وأصبحت الأساس لنظام الترقيم العشري التي يُستخدم الان في مشارق الأرض ومغاربها .

- **الاصالة العربية الإسلامية لاستخدام الصفر ودلالته العلمية:**

اتفقت جميع المصادر على كون العرب هم الذين توصلوا الى فكرة الصفر واستخدامه العلمي بعد اضافته الى الرموز التسعة ويكونوا بذلك قد توصلوا الى فكرة النظام العشري.

فمن حيث المفهوم اللغوي للصفر ، الصَّفْرُ الشيءُ الخالي، يقال: صَفِرَ يَصْفَرُ صَفَراً وصفوراً فهو صِفْر ، وصَفِرَ الشيءَ :خلا ، ويقولون : ما لهُ صَفِر إناؤهُ: هلكتْ ماشيتُه.[8] وذكر المسعودي ، بأن العرب سموا شهر صَفِرْ بهذه التسمية لكون المدن كانت تخلوا من أهلها لخروجهم الى الحرب ، أو لكونهم بغزواتهم للقبائل كانوا يتركون من لقوا صفراً من المتاع حتى أن كلمة الجوع كان من مرادفاتها كلمة الصفر[9].

ومن قول العرب : (نعوذُ باللهِ من صَفَرِ الإناءِ وقَرع الفناء)[10].

وقد وردت لفظة الصفر في الكثير من الأشعار سواء في فترة قبل الإسلام او بعده ومنها، قول حاتم الطائي[11]:

ترى أَن ما أهلكتُ لم يكُ ضرَّني وأنَّ يدي مما بخلْتُ بهِ صِفْر

كذلك قول احد الشعراء[12]:

إذا صَفرتْ عيابُ الودِ منكُم ولم يك بيننا فيها ذمام

من ذلك يظهر لنا ان لفظة صعر عربية الأصل حيث استخدمن في اللغة والشعر.

وقد ورد اصطلاح الصفر أيضا على لسان الرسول الكريم حيث قال: ((إنّ رَبكُم حيٌّ كريمٌ يستحي من عبده إذا رفع يديهِ الى السماء أن يردّهما صفراً))[13].

ويظهر من قول الرسول ان اصطلاح الصفر يعني الخلو او الفراغ وهو المعنى نفسه الذي يفسر به الصفر في المفهوم الرياضي.

اما من حيث الصفر اصطلاحا فان معنى الصفر وفق المفهوم الرياضي عند العرب وهو بمقام العلامة التي توضع للدلالتة على المنزلة الخالية من منازل الأعداد[14].

وقد اتخذ رسم الصفر عند العرب شكلين، الأول على شكل دائرة صغيرة والثاني على هيئة نقطة[15].

ومن النصوص القديمة التي توضح رسم الصفر على شكل دائرة ما ذكره المؤرخ اليعقوبي عند كلامه على منازل الأعداد، فقد ذكر: (...وإذا خلا بيت (خانة) منها يجعل فيه صفر ويكون الصفر دائرة صغيرة)[16].

اما الشكل الثاني للصفر فكان على صورة نقطة بهه الصورة (.) وقد كان للنقطة أهمية كبيرة في الأبجدية العربية حيث كانت بمنزلة المميز والضابط بين الحروف لأن تغيرها من حرف لآخر مثل حرفي الراء والزاء. كذلك نلاحظها في الأرقام وعملها في تغير قيمها تبعاً لعدد النقاط التي توضع عن يمينها[17].

- **الوضع المكاني للأعداد:**

ان المقصود بالوضع المكاني للاعداد تغير قيمة العدد تبعا للمرتبة التي يقع فيها كما هو الحال في النظام العشري الذي يتخذ العدد (10) أساسا فيه حيث ان ذلك النظام يقوم على أساس المنزلة او المرتبة اذا ان لكل رقم فيه قيمتين، قيمة ذاتية في نفسه وقيمة منزلية في مرتبته بين الأرقام الأخرى.

ان الوضع المكاني للاعداد والنظام العشري يعود الفضل في ايجاده الى العرب والمسلمين لكون الحضارات السابقة ومنها الهندية لم تتوصل الى ذلك النظام وذلك لعدم معرفتهم بالصفر[18].

لقد استخدم الخوارزمي في مسائله الحسابية والجبيرة الأرقام التسعة مع الصفر على أساس تغيير الوضع المكاني وفق المفهوم العلمي الصحيح فقد ذكر : (عند اجراء عملية الطرح وإذا لم يكن فيها باق ، نضع صفرا ولا نترك المكان خاليا حتى لا يحدث لبس بين خانة الآحاد وخانة العشرات والصفر يجب ان يكون عن يمين الرقم لأن الصفر عن يسار الاثنين مثلا لا يغير من قيمتها ولا يجعل منها عشرين)[19].

مع ملاحظة ان أسلوب انتقال قيمة الاعداد في النظام العشري تنطبق مع طريقة الكتابة العربية من اليمين الى اليسار وهذا ما يضفي عليها الطابع العربي الأصيل.

وقد أشار اليعقوبي الى نظام مرتبة الاعداد وكيفية تغير قيم الاعداد بقوله: (... الأول منها هو واحد وهو عشرة وهو مائة وهو الف وهو مائة الف وهو الف الف وهو عشرة آلاف ألف وهو مائة الف الف وعلى هذا الحساب فصاعداً. والثاني وهو عشرون....).[20]

ان تلك النصوص وعشرات من القوانين الرياضية والمسائل التطبيقية عليها وفق النظام العشري تثبت بالدليل القاطع ان العرب والمسلمين هم اول من توصل الى ذلك النظام أي النظام العشري وعنهم انتقل الى اوربا وبقية انحاء العالم حيث الان الكل يستخدمون النظام العشري الذي توصل له المسلمون وذلك بإضافة الصفر الى الأرقام التسعة والتعرف على حالة انتقال القيمة العددية للعدد وفق ذلك النظام.

- **الأعداد السالبة:**

ان التوصل الى مفهوم الاعداد السالبة يعد من الإضافات المهمة التي اضافها العرب والمسلمون الى رصيد المعرفة الرياضية .وكما هو معلوم ان الرياضيين في الحضارات القديمة السابقة للإسلام لم يناولوا في ابحاثهم الرياضية الاعداد السالبة ، وإنما يرجع الفضل في البحث في تلك الاعداد الى علماء الرياضيات المسلمين وفي مقدمتهم الخوارزمي الذي أشار لها إشارة صريحة في كتابه الموسوم :(الجبر والمقابلة) كذلك قام باجراء مختاف العمليات الحسابية والجبرية عليها ومما ذكره من الأمثلة عليها: (عشرة إلا واحداً في عشرة إلا واحداً)[21].

اما طريقة حله كما ذكر : (فالعشرة في العشرة مائة ، والواحد الناقص في العشرة عشرة ناقصة والواحد الناقص أيضا في العشرة عشرة ناقصة فذلك ثمانون ، والواحد الناقص في الواحد الناقص واحد زائداً فذلك احد وثمانون).[22]

ومن ذلك وبحسب التعبير الرياضي المعاصر[23]:

(10-1) (10-1)= 100-10-10=1=81

ان ذلك المثال وغيره من الأمثلة الأخرى الواردة في كتاب (الجبر والمقابلة) توضح معرفة الخوارزمي للاعداد السالبة وكيفية اجراء مختلف العمليات الرياضية عليها .

كذلك تضمن كتاب (المنازل السبع) لابي الوفاء البوزجاني إشارات كثيرة وواضحة الى الاعداد السالبة وطرق اجراء العمليات عليها ، ومنها الماثل الأتي الذي ذكره:

قوله: (لو اردنا ان نضرب ثلاثة في خمسة) فطريقة الحل :

(نقصنا فضل العشرة على احد العددين من الآخر فيحصل عندنا دين اثنين ، فاذا اخذنا لكل واحد عشرة ، ثم ضربنا فضل العشرة على الخمسة في فضلها على الثلاثة كان خمسة وثلاثين فإذا قضينا منها الدين وهو عشرون صار الباقي خمسة عشر وهو ما يكون من ضرب خمسة في ثلاثة).[24]

ومن ذلك وبحسب التعبير الرياضي المعاصر لما ذكره البوزجاني: 3×5

10-3=7

5-7= -2 (دين اثنين بحسب تعبير البوزجاني)

10×2-=-20 (دين عشرين بحسب تعبير البوزجاني)

10-5=5

10-3=7

5×7=35

15=20-35 وهو الناتج الصحيح

من ذلك المثال نلاحظ حالتين الأولى الإشارة الى الاعداد السالبة وكيفية التعامل معها فقد أشار لها إشارة صحيحة وادلق علية اصطلاح: (دين) مثلا: (-5) بحسب تعبيره: (دين 5).

ومما هو جدير بالملاحظة اننا الان في بعض الحالات عند تبسيط خطوات الحل نطلق التسمية العربية نفسها على تلك الاعداد حيث اننا نعلم بان المقصود ب: (دين 50) هو: (-50).

ان البحث في الاعداد السالبة للأسف الشديد يُنسب الان الى علماء الغرب ومنهم العالم الإيطالي ليوناردو البيزي حيث ذكر بانه اهتدى اليها أي الاعداد السالبة عند معالجته لمسألة رياضية مالية فقد ذكر بانه ليس هنالك طريق لحلها إلا باستخدام عدد سالب فقد قال: (لقد برهنت على ان لا حل لهذه المسالة إلا اذا قبلنا بان الرجل الأول مدين)[25].

ان نسبة ذلك الابتكار العربي الأصيل الى علماء الغرب يعد من الأمور الخاطئة في تاريخ الرياضيات حيث كما اوضحنا بان العرب سبقوهم بمئات من السنين ، فالعالم الخوارزمي كان قد توفي بعد سنة 232هـ/ 846م، والبوزجاني توفي حوالي سنة 388هـ/998م، في حين ان العالم الإيطالي ليوناردو البيزي كان قد توفي سنة 1240م .

مع ملاحظة ان الأخير كان من احد التلاميذ الذين درسوا الرياضيات العربية الإسلامية في مدارس الاندلس وعنها اخذ معارفه الرياضية وبطبيعة الحال كانت المباحث العربية الإسلامية في الاعداد السالبة من ضمن تلك المعارف الرياضية التي تعلمها في المدارس العربية ونقلها فيما بعد الى الغرب[26].

- **خاصية التوزيع في الضرب:**

لقد أشار علماء الرياضيات الى خاصية التوزيع في الضرب بوضوح تامة ووفق أسئلة تطبيقية على ذلك ومنهم الخوارزمي بقوله : (إنه لا بد لكل عدد يضرب في عدد ان يتضاعف احد العددين بقدر ما في الآخر من الآحاد ،فاذا كانت عقود ومعها آحاد او مستثنى منها آحاد فلا بد من ضربها اربع مرات، العقود في العقود، والعقود في الآحاد، والآحاد في العقود، والآحاد في الآحاد ، فإذا كانت الآحاد التي مع العقود زائدة جميعا فاضرب الرابع الزائد ، واذا كانت ناقصة جميعا فاضرب الرابع الزائد أيضا ، وان كان احدهما زائدا والآخر ناقصا فاضرب.....)[27].

ان قول الخوارزمي ذلك يحتل أهمية كبيرة في تاريخ الرياضيات وذلك بانه يتضمن إشارة صريحة وواضحة الى قاعدة التوزيع في الضرب والمستعملة الان ضمن مناهج الرياضيات الحديثة، وقد أوضح الخوازمي ذلك بمجموعة من الأمثلة منها: (فإذا قيل لك: عشرة إلا شيئا ومعنى الشيء الجذر، في العشرة : فاضرب عشرة في عشرة يكن مائة، والاشياء في عشرة يكون عشرة اجذار ناقصة فيعدل مائة إلا عشرة أشياء)[28]. وقوله: (عشرة إلا شيئا في عشرة إلا شيئا، قلت: عشرة في عشرة بمائة ، ووإلا شيئا في عشرة

عشرة ناقصة وإلا شيئا في عشرة عشرة أشياء ناقصة ، وإلا شيئا في الأشياء مال زائد فيكون ذلك مائة ومالا إلا عشرين شيئا)[29].

من القول الأول نلاحظ:

10(10-س)=100-10س

ومن القول الثاني:

((10-س)(10-س)=100-10س-10س+س(تربيع)= 100-20س+س(تربيع)

يتضح من الأمثلة السابقة التي ذكرها الخوارزمي انه وضح القاعدة التوزيعية في الضرب ، إضافة الى قوانين ضرب العلامات او الإشارات التي يمكن ان نوضحها وفق الأتي[30]:

(+س)×(+ص)=+ س ص

(-س) × (-ص)= + س ص

(+س) × (-ص) + - س ص

(-س)× (+ص) = - س ص

- **قانون ضرب الإشارات:**

ان قانون ضرب الإشارات يعد من القوانين المهمة سواء في الحساب او الجبر والمقابلة وقد تطرق الى ذكره الكثير من العلماء المسلمين ومنهم الخوارزمي وابن البناء المراكشي المتوفى سنة 721هـ فقد أشار له ابن البناء المراكشي إشارة صريحة بقوله: (ضرب الزائدين او الناقصين احدهما في الآخر زائد، وضرب الزائد في الناقص ناقص، والناقص في الزائد ناقص)[31].

كذلك عبر ابن الياسمين عن ذلك شعرا بقوله[32]:

وضرب كل زائد وناقص في نوعه زيادة للفاحص

وضربه في ضده نقصان فافهم هداك الملك الديان

ومن ذلك وفق التعبير الرياضي المعاصر:

(+)×(+)= (+)

(-)×(-) = (+)

(+) ×(-)= (-)

(-)×(-)= (-)

- **العنصر المحايد في الضرب**

خاصية العنصر المحايد في الضرب هي من الخصائص الرياضية المهمة التي نستعملها الان في الرياضيات المعاصرة ، حيث يعتبر الواحد هو العنصر المحايد في الضرب فقد توصل لها علماء الرياضيات المسلمين ومنهم ابن البناء المراشي وذلك بقوله: (إذا ضربت عددا في واحد او ضرب واحد فيه فذلك العدد على حاله لا يتضاعف)[33].

ومن ذلك[34]:

3=1×3

أو:
س×1= س

- **الكسور العشرية وابتكار العرب والمسلمين للفاصلة العشرية**

سبق علماء الرياضيات العرب والمسلمين غيرهم في التوصل الى ابتكار الكسور العشرية والعمليات الحسابية عليها إضافة ولكن للأسف الشديد نُسب ذلك الابتكار الرياضي الى العالم سيمون ستيفن[35] المتوفى سنة 1620م في حين ان علماء الرياضيات المسلمين سبقوا ذلك العالم بعدة قرون .

فقد بحث العالم الرياضي أبو الحسن الإقليدسي المتوفى سنة 341هـ/952م في كتابه (الفصول في الحساب الهندي) عن الكسور العشرية والعميات الحسابية عليها والاشارة الى الفاصلة التي تفصل العدد الصحيح عن الكسر واعتبر من الرواد في ذلك المجال الرياضي. فقد ذكر عن كيفية زيادة على عدد عُشره خمس مرات ، فقال: (فإنا نفرض ذلك العدد على حسب ما جرت به العادة، ثم نعيده تحتح بحطيطة منزلة، فنعلم بذلك عُشره زميده عليه ، فنكون قد زدنا عليه عُشره مرة واحدة)[36]: فاعدناه تحته بحطيطة منزلة وعلّمنا على منزلة الآحاد فصار ذلك...

كذلك العالم غياث الدين الكاشي كان أيضا من الأوائل الذين اهتموا بدراسة الكسور العشرية واجراء مختلف العمليات الحسابية عليها واطلق عليها تسمية (الكسور الإعشاري) فقد خصص الباب الساس من المقالة الثالثة من كتابه (مفتاح الحساب) للبحث في الكسور العشرية حتة انه بين كيفية كتابة الكسور العشرية بقوله : (ينبغي ان نكتب الاعشار في يمين الآحاد وثاني الاعشار قي يمين الاعشاؤر وثالث الاعشار في يمين ثانيها وهكذا الى حيث بلغ فتكون الصحاح والكسور في سطر واحد)[37].

وكانت طريقته في التعبير عن الاعداد الحاوية على الكسور العشرية بالاتي[38]:

501 358 وذلك بكتابة العدد الصحيح بلون غامق والعدد الكسري باللون الفاتح.

وذلك للدلالة على الكسر العشري: 358/501

أو: بالشكل الأتي:

358 صحاحا ، 501 ثال الاعشار

ان ذلك يوضح الاصالة العربية الإسلامية للتعامل مع الكسور العشرية حيث عندما نقارن كيفية كتابة الكسور العشرية وفق المنظور العربي الإسلامي وكيفية كتابتها وفق المنظور الغربي إضافة الى ملاحظة تاريخ توصل العلماء العرب والمسلمين لها مقارنة بالتاريخ الذي توصل به علماء الغرب لها ستتضح امامنا حقيقية اصالة الفكر الرياضي العربي والإسلامي ، وذلك[39]:

اسم العالم	تاريخ وفاته	طريقة التعبير عن الكسر العشري
أبو الحسن الإقليدسي	بعد سنة 341هـ/952م	358501
غياث الدين الكاشي	ح 828هـ/1424م	358501 358 صحاحا، 501 ثال الاعشار
سيمون ستيفن	1585م	8(2)(1)،(0) 17 وذلك عن الكسر 17/28

- **الاعداد التامة والزائدة والناقصة:**

قسم علماء الرياضيات العدد على اقسام مختلفة وقد اوجد العلماء العرب والمسلمين القوانين والعلاقات الخاصة بتلك الأعداد وفق أسس رياضية قادت الى نتائج صحيحة ومن أصناف تلك الأعداد:

- العدد التام:

هو كل عدد إذا جمعت أجزاؤه كان مجموعها مساوياً لجملته من غير زيادة او نقصان، مثل: ستة، وثمانية وعشرين[40].

أي أننا عند جمع كل عوامل عدد من الأعداد التامة فحاصل الجمع يساوي العدد نفسه[41].

مثلا:أجزاء العدد 6=3،2،1.

ومجموعها: = 1+2+3=6 وهو عدد تام

وكذلك:

أجزاء العدد 28= 1+2+4+7+14=28 وهو عدد تام

وتكون الأعداد التامة من الاعداد القليلة الوجود والتي تتصف بالترتيب والنظام حيث يجد منها عدد واحد في كل من الآحاد والعشرات والمئات والألوف وتبدأ دائما بالرقم (6) أو (8) إضافة الى كونها دائماً اعداداً زوجية وهي[42]: 6، 28، 496، 8128.

ومن خواص العدد التام أنه: (إذا ضرب في ثمانية وزيد عليه واحد كان مجذوراً)[43].

عدد تام ×8+1= عدد مجذور

مثال ذلك:

6×8+1=49

49 تحت الجذر =7

28×8+1=225

225 تحت الجذر=15

496×8+1= 3969

4969 تحت الجذر =63

8128×8+1= 65025

65025تحت الجذر =255

- العدد الزائد:

هو العدد الذي تكون مجموع أجزائه اكثر منه، مثل الإثني عشر، والعشرين . وذلك اننا اذا جمعنا قواسم كل عدد من العددين السابقين فسيكون مجموعهما اكثر منها[44]، حيث

إن: العدد (12) أجزاؤه= 6،4،3،2،1

ومجموعها= 6+4+3+2+1= 16

اذن العدد 12 عدد زائد

كذلك:

العدد 20 اجزاؤه= 10،5،4،2،1

ومجموعها= 1+2+4+5+10=22
اذن العدد 20 عدد زائد

- العدد الناقص:

هو كل عدد إذا جمعت أجزاؤه كانت اقل منه[45]، مثل: أربعة ، وعشرة.
فالعدد عشرة ، أجزاؤه = 1،2،5
ومجموعها: 1+2+5=7
اذن العدد 10 هو عدد ناقص
وكذلك العدد أربعة ، أجزاءه = 1،2 ومجموعها 1+2= 3
اذن العدد 4 هو عدد ناقص[46]

- **قواعد إيجاد الاعداد التامة والناقصة والزائدة:**

ساهم العلماء العرب والمسلمين بوضع مجموعة من القوانين الخاصة بتلك الاعداد وطرق استخراجها وفق أسس علمية صحيحة ، ومن أولئك العلماء ابن البناء المراكشي الذي خصص لتلك الاعداد رسالة من رسائله وهي (رسالة في الاعداد التامة والزائدة والناقصة) ومن تلك الطرق، وبحسب قوله:(ان ترتب اعداد يكون الواحد أولها والذي يليه اثنين ثم تتبع ذلك كل عدد هو زوج زوج على توالي ازواج الأزواج هكذا : 1،2،4،8،16،32،000 فإذا جمع الواحد الى الاثنين كان المجتمع منهما ثلاثة وهو عدد اول ،فإذا ضرب في اخر المجموع وهو الاثنان كان الخارج ستة وهو عدد تام،فإذا جمع الواحد الى الاثنين الى الأربعة كان المجتمع سبعة وهو اول ،فإذا ضرب في خرج المجموع وهو الأربعة كان الخارج ثمانية وعشرين وهو عدد تام ،واذا جمع الواحد الى الاثنين الى الأربعة الى الثمانية كان المجتمع خمسة عشر فإذا ضرب في اخر المجموع وهو ثمانية كان الخارج مئة وعشرون وهو عدد غير تام)[47].
ولتوضيح ذلك:
نأخذ الاعداد : (1،2،4،8،16،32) ونستخرج الاعداد التامة بحسب قاعدة ابن البناء المراكشي:
1+2=3 وهو عدد اولي
اذن (1+2)×2=3×2=6 وهو عدد تام
1+2+4=7 وهو عدد اولي
اذن (1+2+4)×4= 28 وهو عدد تام
1+2+4+8= 15 وهو عدد غير اولي
اذن (1+2+4+8)×8= 15×8= 120 وهو عدد غير تام
ووفق التعبير الرياضي المعاصر يكون ابن البناء المراكشي قد توصل الى صياغة فكرة يعبر عنها في الرياضيات المعاصرة بالشكل الاتي [48]:
إذا كان ن= 2 فإن (2أس2)-1= 3 عدد اولي سهم 2(2أس2)-1 =6 عدد تام

إذا كان ن= 3 فإن (2اس3)-1= 7 عدد اولي سهم (2أس 2) (2 أس 3)-1=28 عدد تام
إذا كان ن= 4 فإن (2اس4)-1= 15 عدد غير اولي سهم (2أس 3) (2 أس 4)-1=120 عدد غير اولي
إذا كان ن= 5 فإن (2اس5)-1= 31 عدد اولي سهم (2أس 4) (2 أس 4)-1=496 عدد تام
لذا إذا كان (2 أس ن)-1 عدداً اولياً، فإن (2 أس ن -1)(2 أس ن) -1= عدد تام.

إيجاد الأعداد الزائدة:

وضع علماء الرياضات العرب والمسلمين مجموعة من القواعد الرياضية لإيجاد الأعداد الزائدة ومن تلك الطرق ووما ذكرها عالم الرياضيات ابن البناء المراكشي : (أن تضع اعداد زوج الزوج الواحد أولها هكذا : 1،2،4،8،16،.... فإذا جمع من الواحد الى ما اردت من اعداد زوج الزوج على التوالي ، وإذا ضربت اخرها في عدد اول اقل من المجموع المفروض في المسألة فإن الخارج عدد زائد وقدر زيادته على زيادة اجزائه على مجموع قدر ما زادت جملته على المضروب فيه ، وبيانه انه اذا جمع من الواحد الى الأربعة كان المجموع سبعة فإذا ضربت الأربعة التي اخر مجموع في المسألة في ثلاثة يخرج اثنا عشر وهو زائد.....)[49].

ولتوضيح ذلك: نضع اعداد زوج الزوج هكذا(1،2،4،8،16،32)
فنجمع من الواحد الى الثمانية :1+2+4+8=15
ثم نضرب الثمانية في عدد اولي اقل من مجموع الذي هو (15)
فنحصل على الاعداد الزائدة الاتية: 8×3=24 عدد زائد
8×5=40 عدد زائد
8×7= 57 عدد زائد
كذلك: إذا جمعنا من الواحد الى ستة عشر : (1+2+4+8+16= 31)
ثم نضرب الستة عشر في عدد اولي اقل من المجموع الذي هو 31 فنحصل على الاعداد الزائدة الاتية: 16×3=48 عدد زائد
16×5= 80 عدد زائد
16×11=176 عدد زائد
16×13= 208 عدد زائد

إيجاد الأعداد الناقصة:

تكون قاعدة إيجاد الأعداد الناقصة وفق الأتي : ؛أن نضع اعداد زوج الزوج المبتدأة من الواحد هكذا : (1،2،4،8،16،32،...) ثم نبدأ بالجمع من واحد الى ما لا أردت وتضرب أخر المجموع في عدد أول اكثر من المجموع فما خرج فهو ناقص ، وبيانه:إذا جمع من الواحد الى الأربعة كان المجموع سبعة فإذا ضرب الأربعة في عدد أول أكثر من السبعة مثل أحد عشر يكون الخارج أربعة وأربعين وهو عدد ناقص ، وإذا ضربت في ثلاثة عشر كان الخارج اثنين وخمسين وهو عدد ناقص...)[50].

لتوضيح تلك القاعدة الرياضية[51]:
نضع اعداد زوج الزوج هكذا: (1،2،4،8،16،32،...)
ثم : 1+2+4=7 بجمع أعداد زوج الزوج المبتدأ من الواحد
4×11= 44وهو عدد ناقص وذلك بالضرب في عدد أول أكثر من السبعة
4×13=52 عدد ناقص
4×17=68 عدد ناقص
4× 17=68 عدد ناقص
كذلك : 1+2+4+8= 15
8×17= 136 عدد ناقص وذلك بالضرب في عدد أول اكثر من الخمسة عشر
9×19= 171 عدد ناقص
الأعداد المتحابة وقاعدة ثابت بن قرة الحراني لإيجادها:
احتلت الأعداد المتحابة أهمية كبيرة لدى علماء الرياضيات العرب والمسلمين لكونها تشكل جانبا مهما من جوانب العلوم الرياضية.
وقد ذكر العلماء المسلمين تعريفا لاصطلاح الأعداد المتحابة على أنها : (عددان إذا جمع كل جزء لكل واحد منهما على حدة كانت جملة ذلك مثل العدد الآخر الذي هو قرين العدد الذي جمعت أجزاؤه[52].
وبتعبير آخر : أنهما عبارة عن عددين يتركب كل واحد من أجزاء صاحبه ، كما يتركب صاحبه من أجزائه[53].
ويقال للعددين متحابان إذا كان مجموع أجزاء احدهما يساوي الثاني، ومجموع أجزاء الثاني يساوي الأول ، مثل العددين[54]:
220، 284 يكونان متحابين ، لأن: مجموع أجزاء (قواسم) العدد 220 هي:
1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110= 284
مجموع أجزاء العدد 284 هي: 1+2+4+71+142= 220
لذلك يقال للعددين : 220، 284 متحابان
وقد وضع العلماء العرب والمسلمين قواعد وقوانين لإيجاد الأعداد المتحابة ومنهم العالم ثابت بن قرة الحراني الذي كان السابق في ذلك المجال الرياضي حيث لم يسبقه احد وانه أي ثابت بن قرة الحراني قال : (... وأما الأعداد المتحابة فلم أجد واحداً منهما[55] ذكرها ولا صرف من عنايته إليه شيئاً، فلما خطر ببالي أولها واستخرجت لها برهاناً ، .... فإنا مثبت ذلك من بعد أن أقدم مقدمات يحتاج إليها ...)[56].
ثم ان ابن ثابت الحراني توسع في شرح تلك القواعد الرياضية المبكرة لإيجاد تلك الأعداد ويمكن ان نعبر عن تلك القوانين التي ذكرها ان نعبر عنها وفق التعبير الرياضي المعاصر:[57]
أ=3× (2 أس ن -1)
ب=3×(2أس ن-1) -1
ج= 9× (2 أس 2ن-1) -1

وكانت : أ، ب، ج اعداداً أولية ، ن عدد صحيح موجب ، قإن:
س= (2 أس ن) ×أ= ب عددان متحابان
ع= (2أس ن) ×ج
مثال ذلك: ن=2
فإن: أ= 3×(2أس ن)-1 =3×4-1=12-1=11
ب= 3×2-1=6-1=5
ج= 9×(2 أس 3)-1=9×8-1=72-1=71
وان الأعداد (11،5،71) هي أعداد أولية ، حينئذ ينتج ان العددين :
س=(2أس2)×11×5=5×11× 4=220
ص= (2أس2)×71=71×4=284
وهما عددان متحابان (220، 284) وذلك: لأن قواسم كل منهما يساوي قواسم العدد الثاني.
نالت قاعدة ثابت بن قرة الحراني اهتمام مؤرخي العلم ورجاله ومنهم العالم كاجوري الذي قال : (أن قاعدة الحراني هي اول نموذج معروف لعمل أصيل في الرياضيات عند العرب)[58]. اما هوارد إيفز فذكر: (إن قاعدة إيجاد الاعداد المتحابة لثابت بن قرة من الاعمال العربية الأصيلة)[59].

- **نظرية حساب الخطأين**

نظرية حساب الخطأين من الجوانب الأصيلة في العلوم افلرياضية عند العرب والمسلمين حيث عن طريق تلك النظرية وقوانينها نستطيع ان نجد قيم المجهولات العددية المجهولة وفق قيم رياضية صحيحة ودقيقة غاية الدقة .
ومن العلماء المسلمين الذين بحثوا بحساب الخطأين ابي كامل شجاع بن مسلم ، وقسطا بن لوقا البعلبكي، والحسن بن الهيثم وابن ساعد السنجاري، وابن الهائم المقدسي ، ووغيرهم من علماء الرياضيات العرب والمسلمين.
وتقوم فكرة تلك النظرية وفق مفهوم علماء الرياضيات المسلمين:
أن نأخذ مقداراً ونسميه بالمال أو المفروض الأول ثم نعوضه بحسب ما ورد في منطوق المسألة فإن وافق الناتج المفروض الأول كان المفروض هو الجواب المطلوب ، وإن لم يطابقه فنأخذ الفضل بينه وبين المطلوب ونسميه بالخطأ الأول ، ثم نأخذ مقداراً آخر كيف اتفق ونسميه بالمال الثاني ونتصرف به مثل الأول، فإن لم يحصل المطلوب ، فنأخذ الفضل ونسميه بالخطأ الثاني ، ثم بعد ذلك نطبق العلاقات الآتية:[60]
الحاصل الأول = المال الأول × الخطأ الثاني
الحاصل الثاني= المال الثاني× الخطأ الأول

$$\text{المطلوب} = \frac{\text{الفضل بين الحاصلين}}{\text{الفضل بين الخطأين}}$$ (إذا كان الخطأين زائدين أو ناقصين)

أو:

المطلوب = $\frac{\text{مجموع الحاصلين}}{\text{مجموع الخطأين}}$ (إذا كان الخطأ مختلفين)

مثال تطبيقي على قوانين حساب الخطأين:

إذا كان لزيد عشرة إلا نصف ما لعمرو ، ولعمرو عشرة إلا تُسعي ما لبكر ، ولبكر عشرة إلا سدس ما لزيد . فما هو مقدار ما لكل منهم؟.

خطوات الحل بحسب العلاقات الرياضية التي ذكرها ابن ساعد السنجاري:

نفرض ما لزيد = 3

يكون ما لبكر = 10-6/1×3=2/1×9

يكون ما لعمر=10-9/2×2/1×9/8-7×9

فيكون ما لزيد = 10-2/1×9/8×7-18/1×3

اذن الخطأ الأول= 18/1×3-6-18/1×3=1

ثم نفرض ما لزيد =9

فيكون ما لبكر = 10-6/1×9=2/1×8

فيكون ما لعمر= 10-9/2×2/1×9/1-8×8

فيكون ما لزيد = 10-2/1×9/1=18/17×5 وهو خطأ

اذن الخطأ الثاني= 9 - 18/17×5 =18/1×3

الحاصل الأول= 3×68/1×3= 6/1×9

الحاصل الثاني= 9×18/1×3=2/1×27

اذن المطلوب = 6/1×9+2/1×27 = (3/2×36) / (9/1×6)

= 2/12×6 =6 وهو ما لزيد

فيكون ما لبكر = 10-6/1×6=9

فيكون ما لعمرو = 10-9/2×9 =8

فيكون ما لزيد = 10-2/1×8=6

وبذلك يثبت علماء الرياضيات العرب والمسلمين اصالة فكرهم الرياضي من خلال تلك العلاقات الرياضية التي تستخدم لحل المسائل الحسابية وفق طرق رياضية مبتكرة تؤدي الى نتائج صحيحة.

- **طريقة الحل بالعكس:**

وهذه من الطرق الرياضية المبتكرة التي توصل لها علماء الرياضيات العرب والمسلمين والتي اطلقوا عليها تسمية الحل بالعكس او طريقة التحليل والتعكس .

وتقوم هذه الطريقة على الأبتدأ بحل المسألة الرياضية من أخر ما ورد في منطوق تلك المسألة صعوداً الى الأعلى مع عكس المعطيات فيها حيث ننصف عند التضعيف ، وننقص في الزيادة، ونقسم في الضرب،، ونربع عند التجذير وهكذا، وعند ذلك نحصل على الناتج المطلوب[61].

مثال ذلك: ما هو العدد الذي إذا ضرب في نفسه وزيد على الحاصل اثنان ونصف وضعف وزيد على الحاصل ثلاثة وقسم المجتمع على خمسة وضرب الخارج في عشرة حصل خمسون[62]؟.

فتكون خطوات الحل:

5=10÷50

25 = 5×5

22= 3- 25

11=2÷22

9=2-11

9 تحت الجذر = 3 وهو العدد المطلوب

مثال اخر ذكره ابن ساعد السنجاري:

مال زدت عليه نصفه واربعة دراهم، ثم على المبلغ نصفه واربعة دراهم، بلغ عشرين؟

الحل بحسب خطوات ابن ساعد السنجاري[63]:

16=4-20

10×3/2=16×3/1-16

6×3/2=4-10×3/2

6×3/2-6×3/2×3/1=6×3/2=4×9/4 وهو المال الذي ذُكر في منطوق السؤال

وللتأكد صحة حل ابن ساعد السنجاري:

10×3/2=9/96=9/(36+20+40)=1/4+9/20+9/40=1/4+9/40×2/1+4×9/4

)=1/4+3/16+3/32=4+10×3/32×2/1+10×3/2

20=3/60=1/(4+16+32

وبذلك يثبت صحة الناتج الذي توصل له علماء الرياضيات العرب والمسلمين بتلك الطريقة الحسابية التي ابدع بها أولئك العلماء.

- **نظرية مجموع عددين مكعبين لا عدداً مكعباً:**

هذه النظرية تعد من الجوانب الرياضية العربية الإسلامية التي توصل لها علماء الرياضيات المسلمين وتكمن أهميتها خاصة في علم الجبر لكونها تقوم على اكتشاف خاصية جبرية جديدة يمكن ان نوضحها بالشكل الأتي:

لنأخذ عددين وليكن : 64، 125 وهما عددان مكعبان وذلك لأن:

64، 125 وهما عددان مكعبان وذلك لأن:

4×4×4=64

5×5×5 = 125

لذلك فإن: 64+125= 189 وهو عدد غير مكعب ، وبذلك نثبت صحة تلك النظرية التي توصل لها علماء الرياضيات العرب والمسلمين خلال مسيرتهم العلمية.

لقد اتفق اغلب مؤرخي العلم ورجاله[64] على الاصالة العربية لهذه النظرية ، ولكن للأسف الشديد انها تُنسب الأن الى العالم الفرنسي فرما[65] المتوفى سنة 5166م في حين ان

العرب والمسلمين بحثوا في هذه النظرية وحاولوا البرهنة عليها قبل فرما ومن أولئك العلماء الخنجدي[66] المتوفى سنة 390 هـ/1000م الذي يعد من اوئل العلماء المسلمين الذين تناولوا هذه النظرية والبرهان عليها. ومن العلماء الاخرين الذين بحثوا في هذه النظرية الرياضي الكرجي[67] وعالم الرياضيات الفلكي عمر الخيام[68].

وبذلك اتضح لنا بان تلك النظرية ما هي إلا نظرية عربية توصل لها العلماء العرب والمسلمين وبرهنوا عليها وفق براهين رياضية دقيقية قبل ان يتوصل لها عالم الرياضيات الفرنسي بياردي فرما بعدهم بعدة قرون من الزمن.

- **الخاتمة والنتائج:**

للإنجازات الرياضية العربية الإسلامية أهمية خاصة لكون المفاهيم والقوانين والمسائل الرياضية التي توصل لها علماء الرياضيات العرب والمسلمين أصبحت من المصادر الأساسية للفكر الرياضي في جميع الحضارات اصافة الى كونه اصبح أيضا مصدرا من مصادر الرياضيات المعاصرة وعلى سبيل المثال ان كافة شعوب العالم تستخدم الأرقام العربية وفق السلسلتين المشرقية والمغربية. ومن خلال بحثنا هذا ذكرنا نماذج من الأفكار الاصيلة لأولئك العلماء ولإصالة تلك الأفكار فإنها الان تستخدم ضمن مناهج الرياضيات المعاصرة ومنها:

- الصفر واثبات أصالته العربية الإسلامية لكون شعوب الحضارات القديمة ومنها اليونانية والهندية والصينية وغيرها لم تتوصل اليه وان الصفر بمفهومه العلمي ابتكار عربي إسلامي اصيل.
- النظام العشري والوضع المكاني للأعداد حيث نتيجة لابتكار الصفر من قبل العرب واضافته لرموز الأرقام التسعة توصلوا الى الوضع النظام الرياضي المرن الا وهو النظام العشري الذي جمع الأمم تستخدم الان ذلك النظام لسهولته ودقته.
- كذلك اثبتنا من خلال بحثنا هذا اصالة ابتكار العرب والمسلمين للاعداد السالبة واجراء مختلف العميات الرياضية عليها بما فيها الاعمال الحسابية والهندسية والجبرية إضافة الى استخدامها في مسائل علم المثلثات.
- التوضل الى معرفة خصائص الصرب ومنها خاصية التوزيع وخاصية العنصر المحايد في الضرب وقانون ضرب الإشارات أي الزائد في الزائد والناقص في الناقص والزائد في الناقص والناقص في الزائد.
- سبق علماء العرب والمسلمين في التوصل الى الكسور العشرية ومعرفة علامة الكسر العشري واجاء مختلف العمليات الرياضية على تلك الكسور وحتى تسميتها بالكسور العشرية تسمية عربية.
- البحث وفق أسس علمية بالأعداد الزائدة والناقصة والتامة والمتحابة وإيجاد القوانين الخاصة بإيجاد تلك الاعداد.
- التوصل الى الكثير من النظريات الرياضية التي اثبتنا في بحثنا هذا اصالة نظرية حساب الخطأين ونظرية مجموع عددين مكعبين لا يكون عددا مكعبا.

- كذلك ارفقنا البحث بنماذج مصورة لمجموعة من أوراق مخطوطات مختارة في العلوم الرياضية تثبت اصالة الفكر الرياضي العربي الإسلامي

- الهوامش:

[1])جورج سارتون، تاريخ العلم والإنسية الجديدة ص**166**.

[2])روم لاندو ، الإسلام والغرب ص**245**.

[3]) روم ر لاندو، الإسلام والعرب ص**254**.

[4]) المصدر السابق ص **247**.

[5]) فؤاد سزكين،محاضرات في تاريخ العلوم العربية الإسلامية ص**71**.

[6])جورج سارتون ، الثقافة الغربية في رعاية الشرق ص**79**.

[7]) انظر تفصيل ذلك في : المنشداوي ،تاريخ علم الرياضيات عند العرب ص 621–634.
[8]) ابن فارس ، مجمل اللغة ، مادة : صفر.
[9]) تاج العروس، مادة : صفر.
[10]) المرزوقي، الأزمنة ، مجلة المورد المجلد13 العدد 3 ص277.
[11]) ديوان حاتم الطائي ص50
[12])المرزوقي، الأزمنة ص277.
[13]) ابن ماجه ، السنن 331/3.
[14])اليعقوبي، تاريخ اليعقوبي 70/1البيروني، التفهيم لأوائل صناعة التنجيم ورقة 16.
[15])ابن المغربي، شرح نزهة النظار ورقة 5.
[16]) اليعقوبي،تاريخ اليعقوبي 70/1.
[17]) شرح مرشدة الطالب الى أسنى المطالب ورقة 6.
[18] مجموعة من الباحثين ، معجم الرياضيات ص75؛ العدد لغة العلم ص32.
[19] الصمدر نفسه.
[20]) تاريخ اليعقوبي 65/1؛ كذلك انظر :البغدادي، التكملة في الحساب ص33؛ابن الياسمين، تلقيح الأفكار في العمل برسم الغبار ورقة 8
[21]) الخوارزمي، والمقابلة ص 37.
[22]) المصدر السابق
[23])المنشداوي، تاريخ علم الرياضيات عند العرب ص 311.
[24]) البوزجاني،المنازل السبع ص189.
[25]) برغامي، الرياضيات ص89.
[26]) المنشداوي،تاريخ الرياضيات ص 313.
[2727])الخوارزمي، الجبر والمقابلة ص27.
[28]) المصدر السابق ص28.
[29]) المصدر السابق .
[30]) المنشداوي،تاريخ علم الرياضيات ص 250.
[31])ابن البناء المراكشي، تلخيص اعمال الحساب ص 76.
[32]) ابن الياسمين، الارجوزة الياسمينية في الجبر والمقابلة ص 56.
[33]) ابن البناء المراكشي،تلخيص اعمال الحساب ص51؛ كذلك انظر : البيهشي،الرسالة العلائية ورقة 2
[34]) المنشداوي،تاريخ علم الرياضيات ص525.
[35]) عن سيمون ستيفن، أنظر:مطلب، تاريخ علوم الطبيعة ص17؛ مقدمة في تاريخ الرياضيات ص 356.
[36])البوزجاني، الفصول في الحساب الهندي ص 150.
[37] الكاشي،مفتاح الحساب ص121.
[38]) المصدر السابق.
[39])البوزجاني، الفصول في الحساب الهندي ص525،المنشداوي، تاريخ علم الرياضيات ص 286؛برغاميني،الرياضيات ص24.
[40]) رسائل اخوان الصفا 65/1.
[41]) طوقان،تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك ص59.
[42]) بحوث رياضية مقارنة للفترة العربية الإسلامية ، مجلة المجمع العلمي العراقي المجلد 23 رص 206.
[43])ابن البناء،الشفاء ، الفن الثاني في الحساب ص32.

[44])أخوان الصفا، رسائل اخوان الصفا 65/1؛ البغدادي، التكملة في الحساب 227/1

[45]) المدخل الحفظي الى صناعة الأرثماطيقي ص 23

[46]) المنشداوي،تاريخ علم الرياضيات ص 302.

[47]) ابن البناء المراكشي،رسالة في الاعداد التامة والزائدة والناقصة والتامة ، ضمن حوليات الجامعة التونسية ص 195.

[48])المنشداوي، تاريخ علم الرياضيات ص 304؛العلوم الرياضية في الحضارة العربية الإسلامية 121/1.

[49])ابن البناء المراكشي، رسالة الاعداد التامة والزائدة والناقصة ص199.

[50]) المصدر السابق ص199.

[51]) المنشداوي،تاريخ الرياضيات عند العرب ص 306.

[52]) ابن خلدون ، المقدمة ص395؛ ثابت بن قرة ، الأعداد المتحابة ص26.

[53]) ابن سينا، الشفاء ، الفن الثاني الحساب ص28؛كذلك أنظر : البوزجاني، المدخل الحفظي لصناعة الارثماطيقي ص24.

[54])المنشداوي، تاريخ علم الرياضيات عند العرب ص 307.

[55]) قصد ابن ثابت الحراني بقوله ذلك نيقوماخس وإقليدس وهما من اهم علماء الرياضيات في الحضارة اليونانية.

[56]) ثابن بن قرة ، الأعداد المتحابة ص23.

[57]) المنشداوي ، تاريخ علم الرياضيات عند العرب ص 308–309؛ شخت ، تراث الإسلام 176/3.

[58] (Cajori :Ahistory of Mathematics .p.140.

[59]) لإيفز ، مقدمة في تاريخ الرياضيات ص 309.

[60]) ابن ساعد السنجاري، مخطوطة اللباب في علم الحساب ورقة 23؛ المنشداوي،تاريخ علم الرياضيات عند العرب ص 340.

[61]) مؤلف مجهول، مخطوطة رسالة في الحساب، ورقة 10؛ابن ساعد السنجاري، مخطوطة اللباب في علم الحساب، ورقة 22؛ ابن الهائم المقدسي،مخطوطة الوسيلة في علم الحساب ، ورقى 25،

[62]) العاملي، الأعمال الرياضية ص82.

[63]) ابن ساعد السنجاري،اللباب في علم الحساب ، ورقة 21.

[64]) أرنولد ، تراث الإسلام ج 1 /758 ؛ شخت ، تراث الإسلام ج617/3؛ دانزج ، العدد لغة العلم ص45؛ المنشداوي، تاريخ علم الرياضيات عند العرب ص 344.

[65]) بياردي فرما المتوفى سنة 5166م من كبار الرياضيين الفرنسيين في القرن السابع عشر الميلادي، وكانت له مباحث رياضية مهمة وخاصة في نظرية الأعداد ، إضافة الى ذلك أنه عمل مستشاراً لملك فرنسا لمدة سبعة عشر عاماً. أنظر: مطلب ، تاريخ علوم الطبيعة ص122؛الدفاع ، العلوم الرياضية ،ج317/1؛ إيفز ، مقدمة في تاريخ الرياضيات ص144.

[66])حامد بن خضر الخجندي المتوفى سنة 039 هـ/0001مكان من علماء الرياضيات المسلمين وخاصة في علم المثلثات إضافة الى علم الفلك ، من مؤلفاته: الآلة الشاملة في الفلك ، رسالة في تصحيح الميل وعرض البلد.أنظر: شخت ، تراث الإسلام ج6>17/3

[67])أبو بكر محمد بن الحسين الكرجي ، من أعظم علماء الرياضيات في القرن الرابع الهجري ، من مؤلفاته :البديع في الحساب، الفخري في الجبر.صالح زكي . اثار باقية 265/2؛الزركي،الاعلام 313/9؛تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك ص 282؛
Cajori:History of Mathematics..p.107.Smith:History of Mathematics.Voi.1;p.284.:

[68]) عمر بن إبراهيم الخيام المتوفى سنة 526هـ/1141م كان من العلماء المهتمين في علم الجبر والهندسة والفلك إضافة الى الفلسفة والشعر ، من مؤلفاته:مصادرا اقليدس ،الرسائل الجبرية.عمر فروخ،تاريخ الفكر العلمي الى أيام ابن خلدون ص684؛طوقان ،تراث العر العلمي ص377418؛الأسلوب العلمي ص3؛الدوميبلي ،العلم عند العربص410.<Smith:History of Mathematics.Voi.1;p.860..