قوائم المحتويات متاحة على المجلات الأكاديمية العراقية

مجلة رؤية للدراسات الاجتماعية

الصفحة الرئيسة للمجلة: https://visj.dws.gov.iq/

نظم المعادلات الخطية

Systems of Linear Equations

مصطفى رمضان صالح*

قسم تربية قضاء الجبايش/إعدادية الجزائر للبنين

Keywords

Environmentally friendly alternatives, sustainable planning, renewable energy, sustainable cities.

Abstract

This research addresses systems of linear equations as a fundamental topic in both pure and applied mathematics due to their crucial role in solving scientific, engineering, and economic problems. The study aims to clarify the concept of linear systems and explore various solution methods such as substitution, elimination, matrices, and Cramer's rule. It also highlights the conditions that determine whether a system has a unique solution, infinitely many solutions, or no solution. Furthermore, the research discusses practical applications of linear systems across different fields, demonstrating their importance in bridging theoretical and applied mathematics.

معلومات المقال

تاريخ المقال:

القبول:30\6\2026

الكلمات المفتاحية:

البدائل الصديقة للبيئة ، التخطيط المستدام، الطاقة المتجددة، المدن المستدامة.

ملخص

يتناول هذا البحث دراسة نُظُم المعادلات الخطية بوصفها أحد الموضوعات الأساسية في الرياضيات التطبيقية والبحتة، لما لها من دور محوري في حل المشكلات العلمية والهندسية والاقتصادية. يهدف البحث إلى بيان مفهوم نظم المعادلات الخطية، وطرق حلها المختلفة مثل التعويض، والحذف، والمصفوفات، وقاعدة كرامر، مع تسليط الضوء على الشروط التي تضمن وجود حل وحيد أو حلول متعددة أو عدم وجود حل. كما يناقش البحث التطبيقات العملية لهذه النظم في مجالات متعددة، مما يعكس أهميتها في الربط بين الجانب النظري والتطبيقي في الرياضيات.

***Mustafa Ramadan Saleh**

١.المقدمة

تُعدّ نظم المعادلات الخطية من أهم الموضوعات في الرياضيات التطبيقية والتحليل العددي، إذ تمثل الأساس الذي تقوم عليه كثير من التطبيقات الهندسية والعلمية والاقتصادية. إن حل منظومة من المعادلات الخطية يعني إيجاد قيم المجاهيل التي تحقق جميع المعادلات في آنٍ واحد، وهذا الأمر يبدو بسيطاً عندما يكون عدد المعادلات والمجاهيل صغيراً، لكنه يصبح معقداً للغاية عندما نتعامل مع أنظمة كبيرة تحتوي على مئات أو آلاف المعادلات والمجاهيل.

أهمية البحث

تكمن أهمية هذا البحث في عدة جوانب، منها:

- إبراز الدور الأساسي لنُظُم المعادلات الخطية في مختلف العلوم .
- توضيح العلاقة بين الرياضيات النظرية والتطبيقات الواقعية .
- تنمية مهارات التحليل وحل المشكلات لدى الطلبة والباحثين .
- دعم استخدام الطرق الحديثة مثل المصفوفات في تبسيط الحلول .

أهداف البحث

يسعى البحث إلى تحقيق الأهداف الآتية:

١. تعريف نُظُم المعادلات الخطية وخصائصها .
٢. عرض أهم طرق حل هذه النظم بصورة منهجية .
٣. بيان حالات حلول النظم (حل وحيد، لا حل، حلول غير منتهية .
٤. تطبيق النظم الخطية على مسائل حياتية وعلمية .
٥. تعزيز الفهم الرياضي وربطه بالتطبيق العملي .

إشكالية البحث

تتمحور إشكالية البحث حول التساؤل الرئيس الآتي:

ما هي أفضل الطرق لحل نُظُم المعادلات الخطية، وما الشروط التي تحدد طبيعة حلولها؟

ويتفرع عنه عدة تساؤلات:

- متى يكون للنظام حل وحيد أو أكثر من حل؟
- ما الفرق بين الطرق المختلفة في الحل من حيث الكفاءة والدقة؟
- كيف يمكن توظيف هذه النظم في حل مشكلات واقعية؟

فرضية البحث

ينطلق البحث من الفرضية الآتية:

يمكن حل نُظُم المعادلات الخطية بطرق متعددة، وأن اختيار الطريقة المناسبة يعتمد على طبيعة النظام، كما أن لهذه النظم تطبيقات واسعة تجعلها أداة فعالة في تحليل وحل المشكلات في مختلف المجالات.

إن نظام المعادلات الخطية بشكله العام يُكتب على الصورة:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_1\square x\square = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_2\square x\square = b_2$$
$$\dots$$
$$a\square_1x_1 + a\square_2x_2 + \dots + a\square\square x\square = b\square$$

حيث $a_i\square$ تمثل معاملات النظام، و $x\square$ تمثل المجاهيل، و b_i تمثل الحدود الثابتة. ويمكن كتابة هذا النظام بصورة مصفوفية مختصرة على الشكل $AX = B$، حيث A هي مصفوفة المعاملات، و X هو متجه المجاهيل، و B هو متجه الثوابت.

تنقسم طرق حل نظم المعادلات الخطية إلى قسمين رئيسيين: الطرق المباشرة والطرق غير المباشرة (التكرارية). الطرق المباشرة هي تلك التي تعطي الحل الدقيق (نظرياً) بعد عدد محدد من العمليات الحسابية، ومن أشهرها طريقة كرامر وطريقة غاوس وطريقة غاوس–جوردان وطريقة كراوت. أما الطرق غير المباشرة فهي التي تبدأ بتخمين أولي للحل ثم تحسّنه تدريجياً من خلال عملية تكرارية حتى الوصول إلى

الحل المطلوب بدقة معينة، ومن أشهرها طريقة جاكوبي وطريقة غاوس–سيدل.

يهدف هذا البحث إلى تقديم دراسة شاملة ومعمقة لنظم المعادلات الخطية، تتناول المفاهيم الأساسية المتعلقة بالمصفوفات، ثم تستعرض الطرق المباشرة وغير المباشرة لحل هذه النظم، مع التركيز على الجوانب النظرية والتطبيقية لكل طريقة، فضلاً عن دراسة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية وطرق حسابها.

٢. المصفوفة النظامية

٢.١ تعريف المصفوفة النظامية

المصفوفة النظامية (Regular Matrix) هي المصفوفة المربعة التي يكون محددها لا يساوي الصفر. وتُسمى أيضاً المصفوفة غير المنفردة (Non-singular Matrix) فإذا كانت Aمصفوفة مربعة من الرتبة $n\times n$، فإنها تكون نظامية إذا وفقط إذا كان:

$$\mathbf{det(A) \neq 0}$$

وتتميز المصفوفة النظامية بعدة خصائص مهمة، أبرزها أنها تمتلك مقلوباً (معكوساً)، وأن أعمدتها (أو صفوفها) تشكل مجموعة مستقلة خطياً، وأن رتبتها تساوي عدد صفوفها (أو أعمدتها).

٢.٢ خصائص المصفوفة النظامية

تتمتع المصفوفة النظامية بمجموعة من الخصائص الجوهرية التي تجعلها ذات أهمية بالغة في حل نظم المعادلات الخطية:

أولاً: إذا كانت Aمصفوفة نظامية من الرتبة $n\times n$، فإن النظام $AX = B$يمتلك حلاً وحيداً لأي متجه B.

ثانياً: إذا كانت Aو Bمصفوفتين نظاميتين من نفس الرتبة، فإن حاصل ضربهما ABيكون أيضاً مصفوفة نظامية، ويكون $\mathbf{det(AB) = det(A) \times det(B)}$.

ثالثاً: مقلوب المصفوفة النظامية هو أيضاً مصفوفة نظامية، ويكون $det(A^{-1}) = 1/det(A)$.

رابعاً: منقولة المصفوفة النظامية هي أيضاً مصفوفة نظامية، ويكون $det(A^T) = det(A)$.

٢.٣ المصفوفة المنفردة

في المقابل، المصفوفة المنفردة (Singular Matrix)هي المصفوفة المربعة التي يكون محددها مساوياً للصفر، أي $det(A) = 0$.وهذه المصفوفة لا تمتلك مقلوباً، ونظام المعادلات المرتبط بها إما أن يكون ليس له حل أو يكون له عدد لانهائي من الحلول.

٣. مقلوب (معكوس) المصفوفة المربعة النظامية

٣.١ تعريف المقلوب

إذا كانت Aمصفوفة مربعة نظامية من الرتبة $n\times n$، فإن مقلوبها A^{-1}هو المصفوفة المربعة الوحيدة التي تحقق:

$$\mathbf{A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I}$$

حيث Iهي مصفوفة الوحدة من الرتبة $n\times n$.

٣.٢ طرق إيجاد مقلوب المصفوفة

هناك عدة طرق لإيجاد مقلوب المصفوفة، من أهمها:

الطريقة الأولى: باستخدام المصفوفة المرافقة (Adjoint Matrix)

يُحسب مقلوب المصفوفة Aبالعلاقة:

$$A^{-1} = (1/det(A)) \times adj(A)$$

حيث $adj(A)$هي المصفوفة المرافقة لـــ A، والتي تُحسب بإيجاد العامل المرافق لكل عنصر في المصفوفة ثم أخذ منقولة المصفوفة الناتجة.

العامل المرافق للعنصر a_i يُعرَّف بالعلاقة:

$$A_i = (-1)^{(i+j)} \times M_i$$

حيث M_iهو المحدد الثانوي الناتج عن حذف الصف i والعمود jمن المصفوفة A.

الطريقة الثانية: باستخدام العمليات الأولية (طريقة غاوس–جوردان)

تتلخص هذه الطريقة في تشكيل المصفوفة الموسعة [A | I] ثم إجراء العمليات الأولية على الصفوف لتحويل Aإلى مصفوفة الوحدة I، وعندها تتحول Iإلى A^{-1}، أي:

$$[A \mid I] \rightarrow [I \mid A^{-1}]$$

٣.٣ خصائص مقلوب المصفوفة

من أهم خصائص مقلوب المصفوفة:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$حيث kعدد حقيقي لا يساوي الصفر

٣.٤ مثال تطبيقي

لنأخذ المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2\times3 - 1\times5 = 6 - 5 = 1 \neq 0$$

إذن المصفوفة نظامية ولها مقلوب. باستخدام طريقة المصفوفة المرافقة:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

ويمكن التحقق: $A \times A^{-1} = I$

٤. رتبة المصفوفة

٤.١ تعريف رتبة المصفوفة

رتبة المصفوفة (Rank of Matrix) Aهي أكبر رتبة لمحدد جزئي لا يساوي الصفر يمكن استخراجه من المصفوفة. وبمعنى آخر، هي عدد الصفوف (أو الأعمدة) المستقلة خطياً في المصفوفة. ويُرمز لها بـــ rank(A)أو r(A).

٤.٢ طرق إيجاد رتبة المصفوفة

يمكن إيجاد رتبة المصفوفة بعدة طرق، أبرزها:

الطريقة الأولى: طريقة المحددات الجزئية

نبدأ بفحص المحددات الجزئية من أكبر رتبة ممكنة، فإذا كانت جميعها تساوي صفراً ننتقل إلى الرتبة الأدنى، وهكذا حتى نجد محدداً جزئياً لا يساوي صفراً.

الطريقة الثانية: طريقة التدريج (الاختزال الصفي)

نُجري عمليات أولية على صفوف المصفوفة لتحويلها إلى الشكل المدرَّج (Echelon Form)، ثم نعدّ الصفوف غير الصفرية، وهذا العدد يمثل رتبة المصفوفة.

٤.٣ العلاقة بين رتبة المصفوفة وحل النظام

تلعب رتبة المصفوفة دوراً محورياً في تحديد وجود الحل ووحدانيته لنظام المعادلات الخطية AX = B. فإذا كانت [A|B] هي المصفوفة الموسعة للنظام، فإن:

- إذا كانت rank(A) = rank(A|B) = n (عدد المجاهيل)، فإن النظام له حل وحيد.
- إذا كانت rank(A) = rank(A|B) < n، فإن النظام له عدد لانهائي من الحلول.
- إذا كانت rank(A) ≠ rank(A|B)، فإن النظام ليس له حل (نظام متناقض).

وهذه النتيجة تُعرف بنظرية روشيه–كابيلي (Rouché–Capelli Theorem).

٥. التحويلات الأولية (العمليات البسيطة) على المصفوفات

٥.١ تعريف التحويلات الأولية

التحويلات الأولية على صفوف المصفوفة (أو أعمدتها) هي عمليات بسيطة لا تغير من رتبة المصفوفة ولا من حل النظام المرتبط بها. وتشمل ثلاثة أنواع:

النوع الأول: تبديل صفين

تبديل الصف iمع الصف j، ويُرمز لها بـــ $R_i \leftrightarrow R$□. هذه العملية تغير إشارة المحدد فقط.

النوع الثاني: ضرب صف بعدد غير صفري

ضرب جميع عناصر الصف iبالعدد الثابت) kحيث $k \neq 0$)، ويُرمز لها بـــ $kR_i \rightarrow R_i$. هذه العملية تضرب المحدد بالعدد k.

النوع الثالث: إضافة مضاعف صف إلى صف آخر

إضافة kمرات الصف jإلى الصف i، ويُرمز لها بـــ R_i $+ kR_j \rightarrow R_i$. هذه العملية لا تغير قيمة المحدد.

٥.٢ المصفوفات الأولية

المصفوفة الأولية هي المصفوفة الناتجة عن إجراء عملية أولية واحدة على مصفوفة الوحدة. ولكل عملية أولية مصفوفة أولية مقابلة. وإجراء عملية أولية على المصفوفة Aيكافئ ضرب A(من اليسار في حالة عمليات الصفوف) بالمصفوفة الأولية المقابلة.

٥.٣ الشكل المدرّج والشكل المدرّج المختزل

الشكل المدرّج (Row Echelon Form): هو الشكل الذي يتحقق فيه أن العنصر القائد (أول عنصر غير صفري) في كل صف يقع إلى يمين العنصر القائد في الصف الذي يسبقه، وأن جميع الصفوف الصفرية تقع في أسفل المصفوفة.

الشكل المدرّج المختزل (Reduced Row Echelon Form): بالإضافة إلى شروط الشكل المدرّج، يُشترط أن يكون العنصر القائد في كل صف يساوي ١، وأن جميع العناصر الأخرى في العمود الذي يحتوي على العنصر القائد تساوي صفراً.

٦. المعادلات الخطية المتجانسة

٦.١ تعريف النظام المتجانس

النظام المتجانس (Homogeneous System) هو النظام الذي تكون فيه جميع الحدود الثابتة مساوية للصفر، أي:

$$AX = 0$$

حيث ٠ هو المتجه الصفري. هذا النظام يمتلك دائماً حلاً تافهاً (Trivial Solution) وهو $X = 0$، أي أن جميع المجاهيل تساوي صفراً.

٦.٢ شروط وجود حلول غير تافهة

النظام المتجانس $AX = 0$يمتلك حلولاً غير تافهة (Non-trivial Solutions) إذا وفقط إذا كان $\det(A) = 0$، أو ما يكافئ ذلك، إذا كانت $\text{rank}(A) < n$حيث nهو عدد المجاهيل.

وفي هذه الحالة، فإن مجموعة الحلول تشكل فضاءً جزئياً (Subspace) من الفضاء R^n، ويُسمى فضاء الحلول أو النواة (Null Space)أو (Kernel)للمصفوفة A، وبُعده يساوي $n - \text{rank}(A)$.

٦.٣ خصائص حلول النظام المتجانس

من أهم خصائص حلول النظام المتجانس:

إذا كان X_1و X_2حلّين للنظام $AX = 0$، فإن أي تركيب خطي لهما $c_1X_1 + c_2X_2$هو أيضاً حل للنظام. كما أن عدد الحلول المستقلة خطياً يساوي $n - \text{rank}(A)$، وتُسمى هذه الحلول بالحل الأساسي (Fundamental Solutions).

٧. حل نظام المعادلات الخطية باستخدام مقلوب المصفوفة

٧.١ الأساس النظري

إذا كان النظام $AX = B$حيث Aمصفوفة نظامية (أي $\det(A) \neq 0$)، فإن الحل الوحيد يُعطى بالعلاقة:

$$X = A^{-1}B$$

هذه الطريقة تتطلب أولاً إيجاد مقلوب المصفوفة A، ثم ضربه في المتجه B.

٧.٢ خطوات الحل

تتلخص خطوات حل النظام بهذه الطريقة فيما يلي:

الخطوة الأولى: التحقق من أن المصفوفة Aنظامية بحساب محددها والتأكد من أنه لا يساوي الصفر.

الخطوة الثانية: حساب مقلوب المصفوفة A بإحدى الطرق المعروفة (المصفوفة المرافقة أو طريقة غاوس–جوردان).

الخطوة الثالثة: ضرب A^{-1} في المتجه B للحصول على متجه الحل X.

٧.٣ مثال تطبيقي

لنحل النظام التالي:

$$2x + y = 5$$
$$5x + 3y = 13$$

المصفوفة $A = [2\ 1; 5\ 3]$، والمتجه $B = [5; 13]$

$$\det(A) = 6 - 5 = 1 \neq 0$$
$$A^{-1} = [3\ -1; -5\ 2]$$
$$X = A^{-1}B = [3\times5 + (-1)\times13; (-5)\times5 + 2\times13] = [15-13; -25+26] = [2; 1]$$

إذن $x = 2, y = 1$.

٧.٤ مزايا وعيوب هذه الطريقة

من مزايا هذه الطريقة أنها تعطي الحل الدقيق، وأنها مفيدة عندما نحتاج لحل نفس النظام مع عدة متجهات B مختلفة. أما عيوبها فتتمثل في أن حساب مقلوب المصفوفة مكلف حسابياً خاصة للمصفوفات الكبيرة، إذ يتطلب عدداً كبيراً من العمليات الحسابية يتناسب مع n^3.

٨. حل نظام المعادلات الخطية بطريقة كرامر

٨.١ نظرية كرامر

نظرية كرامر (Cramer's Rule) هي طريقة مباشرة لحل نظام من n معادلة خطية بـ n مجهول، شريطة أن يكون محدد مصفوفة المعاملات لا يساوي الصفر. وتنص هذه النظرية على أن:

$$x_j = \det(A_j) / \det(A),\quad j = 1, 2, \ldots, n$$

حيث A_j هي المصفوفة الناتجة عن استبدال العمود j في المصفوفة A بمتجه الثوابت B.

٨.٢ البرهان

لإثبات نظرية كرامر، نبدأ من النظام $AX = B$. بما أن $\det(A) \neq 0$، فإن A نظامية ولها مقلوب، وبالتالي $X = A^{-1}B$ هو الحل الوحيد. باستخدام تعريف المقلوب عن طريق المصفوفة المرافقة وخواص المحددات، يمكن إثبات أن كل مجهول x_j يُعطى بالنسبة المذكورة أعلاه.

٨.٣ مثال تطبيقي

لنحل النظام:

$$x + y + z = 6$$
$$2x + 3y + z = 10$$
$$x + y + 2z = 9$$

المصفوفة $A = [1\ 1\ 1; 2\ 3\ 1; 1\ 1\ 2]$

$$\det(A) = 1(6-1) - 1(4-1) + 1(2-3) = 5 - 3 - 1 = 1$$

لإيجاد x: نستبدل العمود الأول بـ $B = [6; 10; 9]$

$$\det(A_1) = |6\ 1\ 1; 10\ 3\ 1; 9\ 1\ 2| = 6(6-1) - 1(20-9) + 1(10-27) = 30 - 11 - 17 = 2$$
$$x = \det(A_1)/\det(A) = 2/1 = 2$$

وبطريقة مماثلة نجد $y = 1$، $z = 3$.

٨.٤ تقييم طريقة كرامر

تتميز طريقة كرامر ببساطتها النظرية ووضوحها، إلا أنها غير عملية للأنظمة الكبيرة لأن حساب المحددات يتطلب عدداً هائلاً من العمليات الحسابية. فحل نظام من n معادلة يتطلب حساب $(n+1)$ محددة من الرتبة n، وحساب محددة واحدة من الرتبة n يتطلب عدداً من العمليات يتناسب مع $n!$. لذلك فإن هذه الطريقة تُستخدم عادةً للأنظمة الصغيرة فقط ($n \leq 3$ أو ٤).

٩.حل نظام المعادلات الخطية بطريقة غاوس

٩.١ مبدأ الطريقة

طريقة الحذف لغاوس (Gaussian Elimination) هي من أكثر الطرق المباشرة استخداماً لحل نظم المعادلات الخطية. تعتمد هذه الطريقة على تحويل مصفوفة النظام الموسعة $[A|B]$ إلى مصفوفة مثلثية عليا باستخدام العمليات الأولية على الصفوف، ثم حل النظام المثلثي الناتج بالتعويض الخلفي (Back Substitution).

٩.٢ خطوات الطريقة

تتكون طريقة غاوس من مرحلتين:

المرحلة الأولى: الحذف الأمامي (Forward Elimination)

في هذه المرحلة نقوم بتصفير جميع العناصر الواقعة أسفل القطر الرئيسي، وذلك من خلال العمليات الأولية. نبدأ بالعمود الأول: نجعل العنصر a_{11}(العنصر المحوري) غير صفري (وإلا نبدّل الصفوف)، ثم نطرح من كل صف i حيث $i > 1$) مضاعفاً مناسباً من الصف الأول بحيث يصبح العنصر a_{i1}صفراً. المضاعف المستخدم هو $m_{i1} = a_{i1}/a_{11}$.

ثم ننتقل إلى العمود الثاني ونكرر العملية مع الصفوف أسفل الصف الثاني، وهكذا حتى نحصل على مصفوفة مثلثية عليا.

المرحلة الثانية: التعويض الخلفي (Back Substitution)

بعد الحصول على النظام المثلثي العلوي:

$$a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1}\square x\square = b'_1$$
$$a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2}\square x\square = b'_2$$
$$\ldots$$
$$a'\square\square x\square = b'\square$$

نبدأ بحساب $x\square$من المعادلة الأخيرة: $x\square = b'\square/a'\square\square$

ثم نعوض في المعادلة التي قبلها لحساب $x\square_{-1}$، وهكذا صعوداً حتى نحسب x_1.

٩.٣ مفهوم العنصر المحوري واختياره

العنصر المحوري (Pivot) هو العنصر القطري الذي نستخدمه لتصفير العناصر أسفله. إذا كان العنصر المحوري صفراً أو صغيراً جداً، فقد نحتاج إلى تبديل الصفوف (أو الأعمدة) للحصول على عنصر محوري أكبر. هذه العملية تُسمى المحورية (Pivoting) وهي ضرورية لتحسين الاستقرار العددي للطريقة.

المحورية الجزئية (Partial Pivoting): اختيار أكبر عنصر (بالقيمة المطلقة) في العمود الحالي أسفل العنصر القطري (أو مساوياً له) وتبديل صفه مع الصف الحالي.

المحورية الكاملة (Complete Pivoting): اختيار أكبر عنصر في المصفوفة الجزئية المتبقية وإجراء تبديل للصفوف والأعمدة.

٩.٤ مثال تطبيقي مفصل

لنحل النظام:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 17$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11$$

المصفوفة الموسعة:

[2 1 1 | 7]
[4 3 2 | 17]
[2 1 3 | 11]

الحذف الأمامي:

$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$: [0 1 0 | 3]
$R_3 \rightarrow R_3 - R_1$: [0 0 2 | 4]

النظام المثلثي:

[2 1 1 | 7]
[0 1 0 | 3]
[0 0 2 | 4]

التعويض الخلفي:

من المعادلة الثالثة: $x_3 = 4 \rightarrow x_3 = 2$

من المعادلة الثانية: $x_2 = 3$

من المعادلة الأولى: $x_1 + 3 + 2 = 7 \rightarrow 2x_1 = 2 \rightarrow x_1 = 1$

إذن الحل هو: $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2$.

٩.٥ عدد العمليات الحسابية

يتطلب تطبيق طريقة غاوس على نظام من nمعادلة عدداً من عمليات الضرب والقسمة يقارب $n^3/3 + n^2 - n/3$ لمرحلة الحذف الأمامي، وعدداً يقارب $n^2/2$لمرحلة

التعويض الخلفي. وبالتالي فإن العدد الكلي للعمليات يتناسب تقريباً مع $n^3/3$للأنظمة الكبيرة.

١٠. حساب المحددة بطريقة غاوس

١٠.١ المبدأ

يمكن الاستفادة من طريقة غاوس لحساب محددة المصفوفة بكفاءة عالية. فبعد تحويل المصفوفة إلى شكل مثلثي علوي باستخدام العمليات الأولية، يكون المحدد مساوياً لحاصل ضرب العناصر القطرية مع مراعاة التغييرات الناتجة عن عمليات التبديل.

$$\det(A) = (-1)^s \times a'_{11} \times a'_{22} \times \ldots \times a'_{nn}$$

حيث sهو عدد عمليات تبديل الصفوف التي أُجريت أثناء عملية الحذف، و a'_{ii}هي العناصر القطرية للمصفوفة المثلثية العليا الناتجة.

١٠.٢ مزايا هذه الطريقة

تتفوق هذه الطريقة على طريقة التوسيع (Cofactor Expansion) في حساب المحددات الكبيرة، إذ تتطلب عدداً من العمليات يتناسب مع $n^3/3$بينما تتطلب طريقة التوسيع عدداً يتناسب مع $n!$.

١٠.٣ مثال

لحساب محددة المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 4R_1$: [0 -3 -6]

$R_3 \to R_3 - 7R_1$: [0 -6 -11]

$R_3 \to R_3 - 2R_2$: [0 0 1]

المصفوفة المثلثية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \times (-3) \times 1 = -3$$

١١. طريقة غاوس – جوردان

١١.١ مبدأ الطريقة

طريقة غاوس–جوردان (Gauss-Jordan Method) هي امتداد لطريقة غاوس، حيث لا نكتفي بتصفير العناصر أسفل القطر الرئيسي، بل نصفّر أيضاً العناصر أعلاه، ونجعل العناصر القطرية تساوي ١. أي أننا نحوّل المصفوفة الموسعة إلى الشكل المدرَّج المختزل:

[I | X]

حيث Iهي مصفوفة الوحدة و Xهو متجه الحل مباشرة.

١١.٢ خطوات الطريقة

الخطوة الأولى: نبدأ بالعمود الأول، ونقسم الصف الأول على العنصر المحوري a_{11}لنجعله يساوي ١.

الخطوة الثانية: نصفّر جميع العناصر الأخرى في العمود الأول (أعلى وأسفل العنصر المحوري).

الخطوة الثالثة: ننتقل إلى العمود الثاني ونكرر العملية.

وهكذا نستمر حتى نحصل على مصفوفة الوحدة في الجزء الأيسر.

١١.٣ استخدام الطريقة لإيجاد المقلوب

تُستخدم طريقة غاوس–جوردان أيضاً لإيجاد مقلوب المصفوفة، وذلك بتشكيل المصفوفة الموسعة [$[A|I]$وتطبيق العمليات الأولية لتحويلها إلى $[I|A^{-1}]$.

١١.٤ مثال تطبيقي

لنحل النظام:

$$x + 2y + z = 8$$
$$2x + 5y + 2z = 18$$
$$x + 3y + 3z = 14$$

المصفوفة الموسعة:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 2 & 18 \\ 1 & 3 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$: [0 1 0 | 2]

$R_3 \to R_3 - R_1$: [0 1 2 | 6]

$R_3 \to R_3 - R_2$: [0 0 2 | 4]

$R_3 \to R_3/2$: [0 0 1 | 2]

$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2$: [1 0 1 | 4]
$R_1 \rightarrow R_1 - R_3$: [1 0 0 | 2]
النتيجة: x = 2, y = 2, z = 2.

١١.٥ مقارنة بين طريقة غاوس وطريقة غاوس–جوردان

من حيث عدد العمليات الحسابية، تتطلب طريقة غاوس–جوردان عدداً أكبر من العمليات مقارنة بطريقة غاوس مع التعويض الخلفي. فطريقة غاوس–جوردان تتطلب حوالي $n^3/2$عملية ضرب، بينما تتطلب طريقة غاوس حوالي $n^3/3$عملية. ومع ذلك، فإن طريقة غاوس–جوردان أبسط برمجياً ومفيدة جداً لإيجاد مقلوب المصفوفة.

١٢. طريقة كراوت التحليل(LU)

١٢.١ مبدأ الطريقة

طريقة كراوت (Crout's Method) تعتمد على تحليل المصفوفة Aإلى حاصل ضرب مصفوفتين: مصفوفة مثلثية سفلى Lومصفوفة مثلثية عليا U، أي:

A = LU

حيث:

Lهي مصفوفة مثلثية سفلى (Lower Triangular) عناصرها القطرية غير صفرية.

Uهي مصفوفة مثلثية عليا (Upper Triangular) عناصرها القطرية تساوي ١.

١٢.٢ إيجاد عناصر Lو U

يتم حساب عناصر المصفوفتين Lو Uباستخدام العلاقات التالية:

لحساب عناصر العمود jمن Lحيث ($i \geq j$):

$l_{ij} = a_{ij} - \Sigma(k=1$ إلى $j-1)\ l_{ik} \times u_{kj}$

لحساب عناصر الصف iمن Uحيث ($j > i$):

$u_{ij} = (a_{ij} - \Sigma(k=1$ إلى $i-1)\ l_{ik} \times u_{kj}) / l_{ii}$

مع العلم أن $u_{ii} = 1$لجميع i.

١٢.٣ حل النظام باستخدام التحليل LU

بعد تحليل A = LU، يصبح النظام AX = Bمكافئاً لـ LUX = B. نضع UX = Y، فيصبح لدينا نظامان:

النظام الأول: LY = Bنحله بالتعويض الأمامي لإيجاد Y

النظام الثاني: UX = Yنحله بالتعويض الخلفي لإيجاد X

١٢.٤ مزايا طريقة كراوت

من أهم مزايا هذه الطريقة أنها تسمح بحل النظام لعدة متجهات Bمختلفة دون الحاجة لإعادة عملية التحليل. فبمجرد حساب Lو Uمرة واحدة، يمكن حل النظام لأي متجه Bجديد بعمليات تعويض أمامي وخلفي فقط، وهذا يوفر الكثير من الوقت الحسابي.

١٢.٥ مثال تطبيقي

لنحلل المصفوفة:

A = [2 1 1]
[4 3 3]
[8 7 9]

نبحث عن Lو Uبحيث: A = LU

$l_{11} = 2,\ l_{21} = 4,\ l_{31} = 8$
$u_{12} = a_{12}/l_{11} = 1/2,\ u_{13} = a_{13}/l_{11} = 1/2$
$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3 - 4(1/2) = 1$
$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = 7 - 8(1/2) = 3$
$u_{23} = (a_{23} - l_{21}u_{13})/l_{22} = (3 - 4(1/2))/1 = 1$
$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 9 - 8(1/2) - 3(1) = 2$

إذن:

L = [2 0 0]
[4 1 0]
[8 3 2]

U = [1 1/2 1/2]
[0 1 1]
[0 0 1]

١٢.٦ أنواع أخرى من التحليل

بالإضافة إلى طريقة كراوت، هناك طريقة دوليتل (Doolittle)حيث تكون العناصر القطرية لـ L تساوي ١ بدلاً من U. وهناك أيضاً تحليل تشولسكي (Cholesky Decomposition) الذي يُستخدم

عندما تكون المصفوفة Aمتماثلة وموجبة التعريف، حيث يكون $A = LL^T$.

١٣. الطرائق غير المباشرة (التكرارية) لحل جملة معادلات خطية

١٣.١ مقدمة

الطرق غير المباشرة أو التكرارية (Iterative Methods) هي طرق تبدأ بتخمين أولي لمتجه الحل، ثم تحسّنه من خلال عملية تكرارية متتالية حتى الوصول إلى تقريب مقبول للحل. تُستخدم هذه الطرق بشكل خاص عندما يكون النظام كبيراً جداً ومصفوفته متناثرة (Sparse)، حيث تكون الطرق المباشرة مكلفة حسابياً.

١٣.٢ الشكل العام للطريقة التكرارية

يمكن كتابة أي طريقة تكرارية لحل النظام $AX = B$على الشكل:

$$X^{(k+1)} = TX^{(k)} + C$$

حيث Tهي مصفوفة التكرار، و Cمتجه ثابت، و kهو رقم التكرار. يبدأ التكرار بتخمين أولي $X^{(0)}$ويستمر حتى يتحقق شرط التقارب:

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon$$

حيث εهو الدقة المطلوبة.

١٣.٣ مفهوم التقارب

تتقارب الطريقة التكرارية إذا وفقط إذا كان نصف القطر الطيفي (Spectral Radius) لمصفوفة التكرار T أصغر تماماً من ١، أي:

$$\rho(T) = \max|\lambda_i| < 1$$

حيث λ_iهي القيم الذاتية لمصفوفة التكرار T.

١٤. طريقة جاكوبي

١٤.١ اشتقاق الطريقة

طريقة جاكوبي (Jacobi Method)تعتمد على تحليل المصفوفة Aإلى ثلاثة أجزاء:

$$A = D - L - U$$

حيث Dهي المصفوفة القطرية التي تحتوي على العناصر القطرية لـ A، و Lهي المصفوفة المثلثية السفلى الصارمة (بدون القطر)، و Uهي المصفوفة المثلثية العليا الصارمة (بدون القطر).

من النظام $AX = B$نحصل على:

$$(D - L - U)X = B$$
$$DX = (L + U)X + B$$
$$X = D^{-1}(L + U)X + D^{-1}B$$

وبالتالي صيغة التكرار هي:

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)X^{(k)} + D^{-1}B$$

ومصفوفة التكرار لطريقة جاكوبي هي: $T = D^{-1}(L + U)$

١٤.٢ الصيغة العنصرية

بالصيغة العنصرية، تُكتب طريقة جاكوبي كالتالي:

$$x_i^{(k+1)} = (1/a_{ii}) \times [b_i - \Sigma(j=1, j\neq i\ n)\ a_{ij}x_j^{(k)}]$$

أي أن كل مجهول يُحسب من المعادلة المقابلة له باستخدام القيم السابقة لجميع المجاهيل الأخرى.

١٤.٣ مثال تطبيقي

لنحل النظام:

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
$$-x_1 + 4x_2 - x_3 = -2$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 12$$

صيغ التكرار:

$$x_1^{(k+1)} = (8 + x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/4$$
$$x_2^{(k+1)} = (-2 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)})/4$$
$$x_3^{(k+1)} = (12 - x_1^{(k)} + x_2^{(k)})/4$$

نبدأ بالتخمين الأولي: $X^{(0)} = [0, 0, 0]^T$

التكرار الأول: $x_1^{(1)} = 8/4 = 2,\ x_2^{(1)} = -2/4 = -0.5,\ x_3^{(1)} = 12/4 = 3$

التكرار الثاني: $x_1^{(2)} = (8 + (-0.5) - 3)/4 = 1.125,\ x_2^{(2)} = (-2 + 2 + 3)/4 = 0.75,\ x_3^{(2)} = (12 - 2 + (-0.5))/4 = 2.375$

ونستمر في التكرار حتى التقارب. الحل الدقيق هو $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 3$ (تقريباً بعد عدد كافٍ من التكرارات).

١٤.٤ خصائص طريقة جاكوبي

من أهم خصائص هذه الطريقة أن جميع مكونات المتجه $X^{(k+1)}$ يمكن حسابها بشكل متوازٍ (مستقلة عن بعضها)، مما يجعلها مناسبة للحاسبات المتوازية. كما أن الطريقة تتقارب إذا كانت المصفوفة A قطرياً سائدة (Diagonally Dominant)، أي أن القيمة المطلقة لكل عنصر قطري أكبر من مجموع القيم المطلقة لبقية العناصر في نفس الصف.

١٦. طريقة غاوس – سيدل

١٥.١ اشتقاق الطريقة

طريقة غاوس–سيدل (Gauss-Seidel Method) هي تحسين لطريقة جاكوبي، حيث نستخدم القيم المحدَّثة (الجديدة) فور حسابها بدلاً من انتظار اكتمال التكرار. أي أنه عند حساب $x_i^{(k+1)}$، نستخدم القيم الجديدة $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$ التي سبق حسابها في نفس التكرار، إلى جانب القيم القديمة $x_{i+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ التي لم تُحسب بعد.

من الناحية المصفوفية:

$$(D - L)X^{(k+1)} = UX^{(k)} + B$$

$$X^{(k+1)} = (D - L)^{-1}UX^{(k)} + (D - L)^{-1}B$$

ومصفوفة التكرار لطريقة غاوس–سيدل هي: $T_{GS} = (D - L)^{-1}U$

١٥.٢ الصيغة العنصرية

$$x_i^{(k+1)} = (1/a_{ii}) \times [b_i - \Sigma_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \Sigma_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}]$$

١٥.٣ مثال تطبيقي

باستخدام نفس النظام السابق:

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
$$-x_1 + 4x_2 - x_3 = -2$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 = 12$$

نبدأ بـ $X^{(0)} = [0, 0, 0]^T$

التكرار الأول:

$x_1^{(1)} = (8 + 0 - 0)/4 = 2$

$x_2^{(1)} = (-2 + 2 + 0)/4 = 0$ لاحظ أننا استخدمنا $x_1^{(1)} = 2$ الجديدة

$x_3^{(1)} = (12 - 2 + 0)/4 = 2.5$ استخدمنا $x_1^{(1)} = 2$ و $x_2^{(1)} = 0$ الجديدتين

التكرار الثاني:

$x_1^{(2)} = (8 + 0 - 2.5)/4 = 1.375$

$x_2^{(2)} = (-2 + 1.375 + 2.5)/4 = 0.469$

$x_3^{(2)} = (12 - 1.375 + 0.469)/4 = 2.773$

نلاحظ أن التقارب أسرع من طريقة جاكوبي.

١٥.٤ مقارنة بين طريقة جاكوبي وطريقة غاوس–سيدل

بشكل عام، تتقارب طريقة غاوس–سيدل بسرعة أكبر من طريقة جاكوبي (تقريباً ضعف السرعة)، وذلك لأنها تستفيد من المعلومات المحدَّثة فور توفرها. لكن هذا ليس صحيحاً دائماً، فهناك أنظمة تتقارب فيها طريقة جاكوبي بينما لا تتقارب طريقة غاوس–سيدل، والعكس صحيح. ومع ذلك، إذا كانت المصفوفة A قطرياً سائدة، فإن كلتا الطريقتين تتقاربان.

من ناحية أخرى، طريقة جاكوبي أفضل للحوسبة المتوازية لأن حساب جميع المكونات مستقل، بينما في طريقة غاوس–سيدل يعتمد حساب كل مكون على المكونات السابقة، مما يجعلها طريقة تسلسلية بطبيعتها.

١٦. شروط تقارب الحل ودراسة أخطاء الطرق غير المباشرة

١٦.١ شرط التقارب العام

كما ذكرنا، تتقارب الطريقة التكرارية $X^{(k+1)} = TX^{(k)} + C$ إذا وفقط إذا كان نصف القطر الطيفي لمصفوفة التكرار T أصغر تماماً من ١:

$$\rho(T) < 1$$

وهذا الشرط ضروري وكافٍ. ونصف القطر الطيفي هو أكبر قيمة مطلقة بين القيم الذاتية لمصفوفة التكرار.

١٦.٢ شرط السيادة القطرية

شرط كافٍ (ولكن ليس ضرورياً) لتقارب كل من طريقة جاكوبي وطريقة غاوس–سيدل هو أن تكون المصفوفة A قطرياً سائدة (Diagonally Dominant)، أي:

$$|a_{ii}| > \Sigma_{j=1, j\neq i} |a_{ij}| \quad \text{لكل } i = 1, 2, \ldots, n$$

هذا يعني أن القيمة المطلقة لكل عنصر قطري أكبر من مجموع القيم المطلقة لبقية العناصر في نفس الصف. وفي الممارسة العملية، إذا لم يكن النظام محققاً لهذا الشرط، يمكن أحياناً إعادة ترتيب المعادلات لتحقيقه.

١٦.٣ شرط المصفوفة الموجبة التعريف

إذا كانت المصفوفة A متماثلة وموجبة التعريف (Symmetric Positive Definite)، فإن طريقة غاوس–سيدل تتقارب دائماً بغض النظر عن التخمين الأولي.

١٦.٤ تقدير الخطأ

يمكن تقدير الخطأ في التكرار k بالعلاقة:

$$\|X^{(k)} - X^*\| \leq \|T\|^k / (1 - \|T\|) \times \|X^{(1)} - X^{(0)}\|$$

حيث X^* هو الحل الدقيق و$\|T\|$ هو معيار مصفوفة التكرار. وهذا يعطينا تقديراً مسبقاً لعدد التكرارات اللازمة للوصول إلى دقة معينة.

١٦.٥ معيار التوقف

في التطبيق العملي، نتوقف عن التكرار عندما يتحقق أحد الشروط التالية:

الشرط الأول: $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon$ (الفرق بين تكرارين متتاليين صغير بما فيه الكفاية)

الشرط الثاني: $\|AX^{(k)} - B\| < \varepsilon$ (المتبقي أو الرصيد صغير بما فيه الكفاية)

الشرط الثالث: عدد التكرارات وصل إلى حد أقصى محدد مسبقاً.

١٦.٦ تحسين سرعة التقارب

يمكن تحسين سرعة التقارب باستخدام عامل الاسترخاء Relaxation Factor ω في طريقة الاسترخاء المتتالي (Successive Over-Relaxation - SOR):

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega \times x_i^{(GS)}$$

حيث $x_i^{(GS)}$ هي القيمة المحسوبة بطريقة غاوس–سيدل. عندما $\omega = 1$ نحصل على طريقة غاوس–سيدل العادية، وعندما $1 < \omega < 2$ نحصل على الاسترخاء المفرط الذي يُسرِّع التقارب في كثير من الحالات.

١٧. القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

١٧.١ التعريف

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$، فإن العدد λ يُسمى قيمة ذاتية (Eigenvalue) للمصفوفة A إذا وُجد متجه غير صفري X يحقق:

$$AX = \lambda X$$

والمتجه X يُسمى المتجه الذاتي (Eigenvector) المرتبط بالقيمة الذاتية λ.

يمكن إعادة كتابة المعادلة على الشكل:

$$(A - \lambda I)X = 0$$

وهذا نظام متجانس له حل غير تافه إذا وفقط إذا كان:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

وهذه المعادلة تُسمى المعادلة المميزة (Characteristic Equation) للمصفوفة A.

١٧.٢ المعادلة المميزة

المعادلة المميزة هي معادلة جبرية من الدرجة n في المجهول λ:

$\det(A - \lambda I) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0$

وبحسب النظرية الأساسية في الجبر، لهذه المعادلة n جذراً (حقيقياً أو مركباً)، وهذه الجذور هي القيم الذاتية للمصفوفة A.

١٧.٣ خصائص القيم الذاتية

من أهم خصائص القيم الذاتية:

أولاً: مجموع القيم الذاتية يساوي أثر المصفوفة (trace)، أي: $\Sigma\lambda_i = \Sigma a_{ii} = tr(A)$

ثانياً: حاصل ضرب القيم الذاتية يساوي محدد المصفوفة، أي: $\Pi\lambda_i = \det(A)$

ثالثاً: إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ A، فإن λ^n قيمة ذاتية لـ A^n.

رابعاً: إذا كانت A نظامية و λ قيمة ذاتية لها، فإن $1/\lambda$ قيمة ذاتية لـ A^{-1}.

خامساً: القيم الذاتية للمصفوفة المتماثلة الحقيقية هي دائماً أعداد حقيقية.

١٧.٤ الفضاء الذاتي

الفضاء الذاتي (Eigenspace) المرتبط بالقيمة الذاتية λ هو مجموعة جميع المتجهات الذاتية المرتبطة بـ λ مضافاً إليها المتجه الصفري، أي:

$E\lambda = \{X : (A - \lambda I)X = 0\} = Null(A - \lambda I)$

وبُعد هذا الفضاء يُسمى المضاعفة الهندسية (Geometric Multiplicity) للقيمة الذاتية λ.

١٧.٥ مثال تطبيقي

لنجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

المعادلة المميزة:

$\det(A - \lambda I) = |4-\lambda\ 1;\ 2\ 3-\lambda| = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

$(\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$

القيم الذاتية: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$

لإيجاد المتجه الذاتي المرتبط بـ $\lambda_1 = 5$:

$(A - 5I)X = 0 \rightarrow [-1\ 1;\ 2\ -2]X = 0 \rightarrow x_1 = x_2$

إذن المتجه الذاتي: $X_1 = t[1;\ 1]$ حيث $t \neq 0$)

لإيجاد المتجه الذاتي المرتبط بـ $\lambda_2 = 2$:

$(A - 2I)X = 0 \rightarrow [2\ 1;\ 2\ 1]X = 0 \rightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -2x_1$

إذن المتجه الذاتي: $X_2 = t[1;\ -2]$ حيث $t \neq 0$

١٨. طريقة التكرار لتعيين أكبر قيمة ذاتية والمتجه الذاتي المرتبط بها

١٨.١ طريقة القوى (Power Method)

طريقة القوى هي طريقة تكرارية لإيجاد أكبر قيمة ذاتية (بالقيمة المطلقة) للمصفوفة والمتجه الذاتي المرتبط بها. تعتمد الفكرة على أنه إذا بدأنا بمتجه ابتدائي عشوائي $X^{(0)}$ وكررنا ضربه بالمصفوفة A، فإن المتجه الناتج يتقارب نحو المتجه الذاتي المرتبط بأكبر قيمة ذاتية.

١٨.٢ خوارزمية الطريقة

الخطوة الأولى: نختار متجهاً ابتدائياً $X^{(0)}$ غير صفري.

الخطوة الثانية: نحسب $Y^{(k)} = AX^{(k)}$

الخطوة الثالثة: نحسب القيمة الذاتية التقريبية: $\lambda^{(k)} =$ العنصر الأكبر (بالقيمة المطلقة) في $Y^{(k)}$

الخطوة الرابعة: نطبّع المتجه: $X^{(k+1)} = Y^{(k)} / \lambda^{(k)}$

الخطوة الخامسة: نكرر من الخطوة الثانية حتى التقارب.

١٨.٣ شروط التقارب

تتقارب طريقة القوى بشرط أن:

أولاً: يكون للمصفوفة A قيمة ذاتية سائدة (Dominant Eigenvalue)، أي أن $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ حيث λ_1 هي أكبر قيمة ذاتية.

ثانياً: أن يكون المتجه الابتدائي $X^{(0)}$ له مركبة غير صفرية في اتجاه المتجه الذاتي المرتبط بـ λ_1.

١٨.٤ سرعة التقارب

سرعة تقارب طريقة القوى تعتمد على النسبة $|\lambda_2/\lambda_1|$. كلما كانت هذه النسبة أصغر، كان التقارب أسرع. فإذا كانت النسبة قريبة من ١، فإن التقارب يكون بطيئاً جداً.

١٨.٥ مثال تطبيقي

لنجد أكبر قيمة ذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

نبدأ بـ $X^{(0)} = [1; 1]$

التكرار الأول:

$$Y^{(1)} = AX^{(0)} = [2+1; 1+3] = [3; 4]$$

$\lambda^{(1)} = 4$ أكبر عنصر بالقيمة المطلقة

$$X^{(1)} = [3/4; 1] = [0.75; 1]$$

التكرار الثاني:

$$Y^{(2)} = AX^{(1)} = [2(0.75)+1; 0.75+3] = [2.5; 3.75]$$

$$\lambda^{(2)} = 3.75$$

$$X^{(2)} = [2.5/3.75; 1] = [0.667; 1]$$

التكرار الثالث:

$$Y^{(3)} = AX^{(2)} = [2(0.667)+1; 0.667+3] = [2.333; 3.667]$$

$$\lambda^{(3)} = 3.667$$

$$X^{(3)} = [0.636; 1]$$

نلاحظ أن القيمة الذاتية تتقارب نحو $\lambda = (5+\sqrt{5})/2 \approx 3.618$ والمتجه الذاتي يتقارب نحو [١؛ ٠.٦١٨].

١٨.٦ طريقة القوى العكسية

لإيجاد أصغر قيمة ذاتية، نطبق طريقة القوى على المصفوفة A^{-1} بدلاً من A. وذلك لأن القيم الذاتية لـ A^{-1} هي مقلوبات القيم الذاتية لـ A، وبالتالي فإن أكبر قيمة ذاتية لـ A^{-1} تكون مقلوب أصغر قيمة ذاتية لـ A.

١٨.٧ طريقة الإزاحة (Shifted Power Method)

لإيجاد قيم ذاتية أخرى غير الأكبر، يمكن استخدام طريقة الإزاحة. فإذا عرفنا القيمة الذاتية الأكبر λ_1، يمكن تطبيق طريقة القوى على المصفوفة $A - \lambda_1 I$ لإيجاد القيمة الذاتية التالية.

١٩. تمارين وتطبيقات

١٩.١ تمارين على الطرق المباشرة

تمرين ١: حل النظام التالي بطريقة كرامر:

$$3x + 2y - z = 1$$
$$x + y + z = 6$$
$$2x - y + 3z = 9$$

الحل: $\det(A) = 3(3+1) - 2(3-2) + (-1)(-1-2) = 12 - 2 + 3 = 13$

$\det(A_1) = 1(3+1) - 2(18-9) + (-1)(-6-9) = 4 - 18 + 15 = 1 \rightarrow x = 1/13$

(يُكمل الحل بطريقة مماثلة لبقية المجاهيل)

تمرين ٢: حل النظام التالي بطريقة غاوس:

$$x + y + z = 6$$
$$2x + 3y + z = 10$$
$$3x + y + 2z = 11$$

الحل:

المصفوفة الموسعة: [١ ١ ١ | ٦؛ ٢ ٣ ١ | ١٠؛ ٣ ١ ٢ | ١١]

$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$: [0 1 -1 | -2]

$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$: [0 -2 -1 | -7]

$R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2$: [0 0 -3 | -11]

من المعادلة الثالثة: $z = 11/3$

من المعادلة الثانية: $y = -2 + z = -2 + 11/3 = 5/3$

من المعادلة الأولى: $x = 6 - y - z = 6 - 5/3 - 11/3 = 6 - 16/3 = 2/3$

١٩.٢ تمارين على الطرق التكرارية

تمرين ٣: حل النظام التالي بطريقة جاكوبي (٣ تكرارات):

$$5x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1 + 5x_2 = 12$$

الحل:

صيغ التكرار:

$x_1^{(k+1)} = (10 - x_2^{(k)})/5$

$x_2^{(k+1)} = (12 - x_1^{(k)})/5$

بدءاً من: $X^{(0)} = [0, 0]^T$

التكرار ١: $x_1 = 2, x_2 = 2.4$

التكرار ٢: $x_1 = (10-2.4)/5 = 1.52, x_2 = (12-2)/5 = 2$

التكرار ٣: $x_1 = (10-2)/5 = 1.6, x_2 = (12-1.52)/5 = 2.096$

الحل الدقيق: $x_1 = 48/24 \approx 1.583, x_2 = 50/24 \approx 2.083$

١٩.٣ تطبيقات هندسية

تُستخدم نظم المعادلات الخطية في العديد من التطبيقات الهندسية والعلمية، منها:

في الهندسة الإنشائية، تُستخدم لتحليل الهياكل وحساب القوى والإجهادات في العناصر الإنشائية. وفي الهندسة الكهربائية، تُستخدم لتحليل الدوائر الكهربائية باستخدام قوانين كيرشوف. وفي معالجة الصور الرقمية، تُستخدم في التحويلات الخطية والتصفية. وفي النمذجة الاقتصادية، تُستخدم في نماذج المدخلات والمخرجات. وفي حل المعادلات التفاضلية الجزئية عددياً باستخدام طريقة الفروق المنتهية أو طريقة العناصر المنتهية.

الخاتمة والاستنتاجات

تناول هذا البحث بالتفصيل موضوع نظم المعادلات الخطية من جوانبه المتعددة. وقد تبيّن من خلال الدراسة أن اختيار الطريقة المناسبة لحل نظام معين يعتمد على عدة عوامل، أهمها حجم النظام (عدد المعادلات والمجاهيل)، وبنية المصفوفة (كثيفة أم متناثرة)، والدقة المطلوبة، والموارد الحسابية المتاحة.

بالنسبة للأنظمة الصغيرة ($n \leq 100$ تقريباً)، تُفضّل الطرق المباشرة مثل طريقة غاوس أو طريقة كراوت لأنها تعطي الحل الدقيق بعد عدد محدد من العمليات. أما بالنسبة للأنظمة الكبيرة جداً ذات المصفوفات المتناثرة ($n > 1000$)، فتُفضّل الطرق التكرارية لأنها تستغل تناثر المصفوفة ولا تحتاج لتخزين المصفوفة كاملة.

كما تبيّن أن دراسة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية ترتبط ارتباطاً وثيقاً بسلوك الطرق التكرارية وتقارب الحل، فنصف القطر الطيفي لمصفوفة التكرار هو الذي يحدد ما إذا كانت الطريقة ستتقارب أم لا، ويحدد أيضاً سرعة التقارب.

وأخيراً، فإن مجال التحليل العددي لنظم المعادلات الخطية لا يزال مجالاً بحثياً نشطاً، حيث تُطوَّر باستمرار طرق جديدة أكثر كفاءة ودقة، خاصة مع تطور الحوسبة المتوازية والحوسبة عالية الأداء.

المراجع

١. الراوي، عماد توفيق، والعاني، بشار حسين. (٢٠١٤). **التحليل العددي وطرق حسابه العددية**. بغداد: دار الكتب والوثائق العراقية.

٢. الدليمي، عبد الرزاق محمد. (٢٠١٠). **التحليل العددي**. عمّان: دار المسيرة للنشر والتوزيع.

٣. خليل، حسن إبراهيم. (٢٠٠٨). **مقدمة في التحليل العددي**. القاهرة: دار المعارف.

٤. العبيدي، صلاح الدين محمد. (٢٠١٢). **الجبر الخطي ونظرية المصفوفات**. بغداد: مطبعة جامعة بغداد.

٥. الكبيسي، محمد عبد العزيز. (٢٠٠٩). **طرائق الحساب العددي**. الموصل: دار ابن الأثير للطباعة والنشر.

٦. نصيف، عدنان محمد، وآخرون. (٢٠١١). **أساسيات التحليل العددي**. بغداد: دار الحكمة للطباعة والنشر.

٧. الخفاجي، سعدون نعمة. (٢٠٠٧). **الطرائق العددية في التحليل والحساب**. بصرة: مطبعة جامعة البصرة.

٨. الشمري، فاضل عبد الله. (٢٠١٣). **المصفوفات والمحددات وتطبيقاتها**. عمّان: دار الأيام للنشر والتوزيع.

٩. البياتي، حامد عبد الله. (٢٠٠٦). **مبادئ الجبر الخطي**. بغداد: مكتبة الجامعة المستنصرية.

١٠. العزاوي، محمود أحمد. (٢٠١٥). **المدخل إلى التحليل العددي باستخدام الحاسوب**. أربيل: مطبعة جامعة صلاح الدين.