تحسين طريقة المقدر غير المتحيز ذي اقل تباين

م.م الحان نهاد جمعة

المستخلص

ركّز هذا البحث على تحسين طريقة المقدر غير المتحيز ذي اقل تباين منتظم لدالة معولية النظام المتسلسل لتوزيع ويبل ذي المعلمتين وذلك من اجل الوصول الى أفضل مقدر لدالة المعولية .

١- توزيع ويبل The Weibull distribution

يُعدّ توزيع ويبل احد التوزيعات المستمرة ومن اشهر عوائل توزيعات الفشل اشتقه العالم السويدي (**Wallodi Weibull**) عام (١٩٣٩) وقد بين بعض تطبيقات التوزيع فقد استخدم توزيع ويبل لوصف التنوع في حالات الفشل وفي وصف فشل بعض الاجهزة الكهربائية كالصمام المفرغ **[4]** .

لقد كان لبروز هذا التوزيع وخاصة في الحرب العالمية الثانية وتطبيقاته الواسعة في حقل المعولية واختبارات الحياة محور اهتمام عدد من الباحثين في هذا المجال فذكروا خواصه ، وقدروا معالمه وتم اجراء ابحاث عديدة في مجال استخداماته ونشرت حوله الكثير من البحوث ، وذلك بالنظر لما يتمتع به هذا التوزيع من اهمية كبيرة من الناحيتين النظرية والتطبيقية ، فهو يمثل حالة عامة لعدد من التوزيعات .

ويمكن اشتقاق دالة هذا التوزيع من مفهوم معدل المخاطرة **[1]** ، اذ ان دالة المخاطرة لتوزيع **Weibull** عندما تكون معلمة الشكل (**shape parameter**) معلومة هي :

$$h_T(t)=\frac{\beta}{\theta}t^{\beta-1} \qquad \beta,\theta>0 \qquad \text{.....(1)}$$

وبما ان

$$f_T(t)=h_T(t)\exp\{-\int_0^t h_T(x)dx\}$$

حيث ان **t** متغير عشوائي يمثل الزمن لحدوث الفشل ومن المعادلتين اعلاه نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل ذي المعلمتين والتي هي :

$$f_T(t)=\frac{\beta}{\theta}t^{\beta-1}\exp\{-\frac{t^\beta}{\theta}\} \qquad t\geq 0;\beta,\theta>0 \quad \text{.....(2)}$$

وتكون دالة التوزيع (التجميعية) للتوزيع كالاتي :

$$F_T(t)=1-\exp\{-\frac{t^\beta}{\theta}\} \qquad \text{.....(3)}$$

حيث ان :

$\beta>0$ معلمة الشكل (**shape parameter**) أي تحدد شكل التوزيع .

$\theta>0$ معلمة القياس (**scale parameter**) واحياناً تسمى بمعدل الحياة (**characteristic life**) .

وكما تجدر الاشارة الى ان دالة المخاطرة تكون :

١- دالة متزايدة مع t عندما $\beta>1$.
٢- دالة متناقصة مع t عندما $\beta<1$.
٣- تكون ثابتة عندما $\beta=1$.

ان توزيع ويبل يتحول الى التوزيع الاسي (Exponential distribution) عندما $\beta=1$ ، وعندما $\beta=2$ سيتحول توزيع ويبل الى توزيع يعرف بتوزيع رالي (Rayleigh distribution) ، وعندما $3\le\beta\le4$ فأن التوزيع سيقترب من التوزيع الطبيعي (Normal distribution) [2] .

ان المتوسط والتباين لتوزيع ويبل معطى في الصيغة الاتية وعلى التوالي :

$$Mean=\theta^{\beta}\,\Gamma(1+\frac{1}{\beta}) \quad \text{.....(4)}$$

$$Variance=\theta^{\beta}\{\Gamma(1+\frac{2}{\beta})-[\Gamma(1+\frac{1}{\beta})]^2\} \quad \text{.....(5)}$$

٢- مفهوم المعولية Reliability

المعولية عبارة عن مقياس لقابلية أو قدرة أي جزء من أجزاء نظام معين أو نظام ككل على العمل بصلاحية تامة دون توقف ، كما تُعرّف معولية الجهاز على إنها نوعية ذلك الجهاز [3] ، ولعل التعريف الاشمل للمعولية هو احتمال الإنجاز لأي جزء من النظام خلال مدة زمنية معينة وتحت ظروف عمل خاصة ،. ورياضياً إذا كانت الدالة R(t) ترمز لمعولية النظام عند الزمن t فأن:

$$R(t) = p(T > t) \quad , t\ge o \quad \text{..... (6)}$$

حيث إن T متغير عشوائي مستمر يمثل الزمن المتراكم لحياة النظام خلال تلك الفترة ولغرض الربط بين الدالة الاحتمالية ودالة المعولية نفرض إن زمن الحياة T للنظام يتوزع بحسب دالة التوزيع الاحتمالية F(t) لما كان :

$$p(T > t) = 1 - p(T \le t) \quad \text{.....(7)}$$

فأن :

$$R(t) = 1 - F(t) \quad \text{.....(8)}$$

حيث إن F(t) تسمى دالة اللامعولية .

٣- تقدير المعولية بطريقة المقدر غير المتحيز ذي اقل تباين منتظم :

Estimation Reliability By UMVU Method

سيتم تقدير المعولية لتوزيع ويبل من خلال العلاقة بين التوزيع الاسي وتوزيع ويبل وبالشكل التالي :

المتغير العشوائي $Y=T^{\beta}$ يكون له توزيعاً اسياً بمعلمة قياس θ عندما T_n يتبع توزيع ويبل بمعلمة قياس θ ومعلمة شكل β عندئذٍ يكون :

$$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}=\overline{Y}$$

تمثل احصاءة كافية كاملة للمعلمة θ وطالما ان معلمة الشكل β معلومة عندئذٍ نستطيع ان نعبر عن دالة المعولية بالشكل الاتي :

$$P(Y>y)=P(Y>t^{\beta}) \quad \text{.....(9)}$$

عندها يمكن ان نجد المقدر غير المتحيز المنتظم ذو اقل تباين لدالة المعولية لتوزيع ويبل من خلال ايجاد المقدر غير المتحيز المنتظم ذي اقل تباين لدالة المعولية للتوزيع الاسي .

والخطوات الاتية توضح طريقة ايجاد المقدر غير المتحيز المنتظم ذي اقل تباين لدالة المعولية للتوزيع الاسي ذي معلمة القياس θ [5] .

يتم الحصول على (UMVUE) لدالة المعولية بالاعتماد على مبرهنتي (Rao-Blackwell , Lehman Scheffe) اذ يجب البحث عن UMVUE للاحتمال $P(T \geq t)$ وبافتراض ان $(T_1, T_2, ..., T_n)$ تمثل اوقات الفشل العشوائية التي تتبع التوزيع الاسي ، ولنفرض ان لدينا دالة $u(t_1, t_2, ..., t_n)$ بحيث ان :

$$u(t_1) = \begin{cases} 1 & t_1 \geq t \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

لهذا فأن القيمة المتوقعة لهذه الدالة هي :

$$E[u(t_1)] = (1)\, p(T_1 \geq t) + (0)\, p(T_1 < t)$$
$$\therefore E[u(t_1)] = R_T(t;\theta)$$

وهكذا فأن $u(t_1)$ هو تقدير غير متحيز لـR(t) ولكون ان $\hat{\theta}$ والمساوية الى $\bar{t}$ تمثل الاحصاءة الكافية الكاملة (Complete Sufficient Statistic) للمعلمة θ ،عندئذٍ يمكن التعبير عن المقدر (UMVUE) لدالة المعولية كما يأتي :

$$UMVUE\ \hat{R}(t) = E[u(t_1)/\hat{\theta}] = \int f_T(t_1/\hat{\theta})\, dt \quad .....(10)$$

ومن اجل التوصل الى حساب الصيغة اعلاه لابد من اشتقاق التوزيع الشرطي ويتم ذلك من خلال تكوين عينتين مستقلتين ، العينة الاولى بحجم مفردة واحدة والتي هي $t = t_1$ ، والعينة الثانية التي حجمها (n-1) مفردة والتي هي $(t_2, t_3, ..., t_n)$ عندئذٍ فأن :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=2}^{n} t_i}{n-1}$$
$$\therefore (n-1)\bar{X} + t_1 = n\bar{t} \quad .....(11)$$

اذ ان

$$t_1 \approx \Gamma(1, \theta) \quad , \quad \bar{X} \approx \Gamma(n-1, \frac{\theta}{n-1})$$

وطالما ان t_1 مستقلة عن $\bar{X}$ ، نستطيع ايجاد التوزيع المشترك (Joint Distribution) لـ t_1 و $\bar{X}$ بالصيغة الاتية :

$$f(t_1, \bar{X}) = \frac{(n-1)^{n-1}}{\theta^n \Gamma(n-1)} \bar{X}^{n-2} \exp\{-\frac{1}{\theta}[(n-1)\bar{X} + t_1]\} \quad .....(12)$$

نستطيع ايضاً ايجاد التوزيع المشترك لـ t_1 و $\hat{\theta}$ علماً ان : $t = \hat{\theta}$

$$f(t_1, \hat{\theta}; \theta) = \frac{n(n-1)^{n-2}}{\theta^n \Gamma(n-1)} \left[\frac{n\theta}{n-1} - \frac{t_1}{n-1}\right]^{n-2} \exp\{-\frac{n\theta}{\theta}\} \quad 0 < t_1 < n\hat{\theta} \quad ...(13)$$

اذ ان :

$$\hat{\theta} \approx \Gamma(n, \frac{\theta}{n})$$

وان التوزيع الشرطي يكون بالشكل الاتي :

$$g(\bar{t}/\theta) = \frac{(n/\theta)^n}{\Gamma(n)} \bar{t}^{n-1} \exp\{-\frac{n\bar{t}}{\theta}\} \quad \bar{t} > 0 \quad .....(14)$$
$$\therefore f(t_1/\hat{\theta}) = \frac{f(t_1, \hat{\theta}; \theta)}{g(\bar{t}/\theta)}$$
$$= \frac{(n-1)^{n-2}}{n\bar{t}^{n-1}} \left[1 - \frac{t_1}{n\bar{t}}\right]^{n-2} \quad 0 < t_1 < n\bar{t}$$

وهكذا يمكن ايجاد UMVUE لدالة المعولية الواردة في المعادلة (10) كما يأتي :

$$\hat{R}_T(t)=\frac{(n-1)}{n\bar{t}}\int_t^{n\bar{t}}\left(1-\frac{t_1}{n\bar{t}}\right)^{n-2}dt_1 \qquad t<n\bar{t}$$
$$=\left(1-\frac{t}{n\bar{t}}\right)^{n-1}$$
$$\therefore \hat{R}(t)=(1-\frac{t}{\sum_{i=1}^{n}t_i})^{n-1} \qquad \text{.....(15)}$$

لذلك يكون تقدير دالة المعولية $R(t^\beta)$ لتوزيع ويبل عندما تكون معلمة الشكل β معلومة تكون بالشكل الاتي [5] :

$$\hat{R}(t^\beta)=(1-\frac{t^\beta}{\sum_{i=1}^{n}t_i^\beta})^{n-1} \qquad t^\beta<\sum_{i=1}^{n}t_i^\beta \qquad \text{.....(16)}$$

اما تقدير معولية النظام المتسلسل عند وجود k من المركبات المستقلة والمربوطة على التوالي فتكون بالشكل الاتي [6] :

$$\hat{R}_{system}(t^\beta)=\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{t^\beta}{\sum_{i=1}^{n}t_i^\beta})^{n-1}$$
$$=(1-\frac{kt^\beta}{\sum_{i=1}^{n}t_i^\beta})^{n\beta-1} \qquad \text{.....(17)}$$

٤- تقدير المعولية بطريقة المقدر غير المتحيز ذي اقل تباين المحسنة :

Estimation Reliability By Improvement M.V.U.E. Method [7]

بالاعتماد على طريقة المقدر غير المتحيز ذو اقل تباين منتظم فقد تمّ ايجاد مُقدر افضل من المقدر غير المتحيز ذي اقل تباين باستخدام دالة خسارة الخطأ التربيعية ولايضاح هذه الطريقة نتبع الخطوات الاتية :

ليكن T_{ij} متغير عشوائي يمثل وقت الفشل .

حيث ان :

i يمثل عدد المركبات ، j يمثل حجوم العينات .

المسألة هي تقدير معولية النظام عند الزمن t_0 حيث ان

$$R_s(t_0)=\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{ni}p_k\{T_{ij}\ge t_0\}=\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{ni}\exp\{-\frac{t_0^\beta}{\theta_i}\}$$
$$=\exp\{-\sum_{i=1}^{k}n_i t_0^\beta\theta_i^{-1}\}$$
$$=\exp\{-\gamma(\theta)\} \qquad \text{.....(18)}$$

نعرّف $Y_i\equiv\sum_{i=1}^{ni}t_{ij}^\beta$ ، حيث ان y_i يتوزع توزيع كاما بمعلمتين (n_i,θ_i) ، ان دالة الكثافة الاحتمالية $f(y_i)$ لتوزيع كاما تكون بالشكل الاتي :

$$f(y_i)=\frac{1}{\Gamma n_i}\frac{1}{\theta_i^{ni}}y_i^{ni-1}\exp\{-\frac{y_i}{\theta_i}\} \qquad i=1,2,3,....,k \quad \text{...(19)}$$

بما ان الوسط الحسابي الى Y_i بالشكل الآتي :

$$E(y_i)=\int_0^\infty y_i\, f(y_i)dy_i$$
$$=\int_0^\infty y_i\frac{1}{\Gamma n_i}\frac{1}{\theta_i^{ni}}y_i^{ni-1}\exp\{-\frac{y_i}{\theta_i})dy_i$$
$$=\frac{1}{\Gamma n_i\theta_i^{ni}}\int_0^\infty y_i^{ni}\exp\{-\frac{y_i}{\theta_i})dy_i$$
$$let\ x_i=\frac{y_i}{\theta_i}\Rightarrow y_i=x_i\theta_i \Rightarrow dy_i=\theta_i\,dx_i$$
$$E(y_i)=\frac{1}{\Gamma n_i\theta_i^{ni}}\int_0(x\theta_i)^{ni}\theta_i e^{-x}dx_i$$
$$E(y_i)=\frac{\theta_i^{ni}\theta_i}{\Gamma n_i}\Gamma(n_i+1)$$
$$\therefore E(y_i)=n_i\theta_i \qquad \text{.....(20)}$$

ولذلك فأن :

$$E(y_i^{-1})=\int_\infty^\infty y_i^{-1}\, f(y_i)dy_i$$
$$=\int_0^\infty y_i^{-1}\frac{1}{\Gamma n_i}\frac{1}{\theta_i^{ni}}y_i^{ni-1}\exp\{-\frac{y_i}{\theta_i})dy_i$$
$$=\frac{1}{\Gamma n_i\theta_i^{ni}}\int_0^\infty y_i^{ni-2}\exp\{-\frac{y_i}{\theta_i})dy_i$$

$$let\ x_i=\frac{y_i}{\theta_i} \Rightarrow y_i=x_i\theta_i \Rightarrow dy_i=\theta_i\,dx_i$$
$$E(y_i^{-1})=\frac{1}{\theta_i^{ni}\Gamma n_i}\int_0^\infty (x\theta_i)^{ni-2}\theta_i e^{-x}dx_i$$
$$=\frac{\Gamma(n_i-1)}{\theta_i\Gamma n_i}\theta_i^{-1}$$
$$\therefore E(y_i^{-1})=\theta_i^{-1}\frac{1}{n_i-1} \quad ,n_i\geq 2 \qquad \text{.....(21)}$$

بالنتيجة سيكون

$$\frac{n_i-1}{y_i}=\frac{n_i-1}{\sum_{j=1}^{ni}t_{ij}^{\beta}}$$

هو مقدر غير متحيز الى θ_i^{-1} هذا يعني ان :

$$\hat{\theta}_i=\frac{y_i}{n_i-1}=\frac{\sum_{j=1}^{ni}t_{ij}^{\beta}}{n_i-1} \qquad n_i\geq 2,\ j=1,2,...,ni;i=1,2,....,k \quad \text{.... (22)}$$

حيث ان :

k **تمثل عدد المركبات .**

n_i **تمثل حجوم العينات .**

فأن المقدر غير المتحيز ذي اقل تباين الى $\gamma_k(\theta)$ يكون بالشكل الاتي :

$$\zeta^0(Y)=\sum_{i=1}^{k}n_i\frac{n_i-1}{Y_i}t_0^{\beta}=\sum_{i=1}^{k}a_iY_i^{-1} \qquad \text{.....(23)}$$

حيث ان :

$\zeta^0(Y)$ **هو مقدر غير متحيز ذو اقل تباين لـ $\gamma(\theta)$.**

$$a_i=n_i(n_i-1)t_0^{\beta}$$
$$Y_i=\sum_{j=1}^{ni}T_{ij}^{\beta}$$

لذلك فأن تقدير دالة معولية النظام المتسلسل يكون بالشكل الاتي :

$$\hat{R}_{S1}(t_0)=\exp\{-\zeta^0(Y)\}$$
$$=\exp\{-\sum_{i=1}^{k}a_iY_i^{-1}\} \qquad \text{.....(24)}$$

ثم نجد التوقع لـ $\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k}$ و $\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-2/k}$ والتي تفيدنا في برهان المبرهنة التي سنعرضها لاحقاً

$$E\{\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k}\}=\int_0^\infty\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k}\,f(Y_i)dY_i$$
$$=\int_0^\infty\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k}\frac{1}{\Gamma n_i\theta_i^{ni}}Y_i^{ni-1}\exp\{-\frac{Y_i}{\theta_i}\}dY_i$$
$$let\ z_i=\frac{Y_i}{\theta_i} \Rightarrow Y_i=z_i\theta_i \Rightarrow dY_i=\theta_i\,dz_i$$
$$E\{\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k}\}=\int_0^\infty\prod_{i=1}^{k}(z_i\theta_i)^{-1/k}\frac{1}{\Gamma(n_i)\theta_i^{ni}}(z_i\theta_i)^{ni-1}\theta_i\exp\{-z_i\}dz_i$$
$$=\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-1/k}\prod_{i=1}^{k}\frac{\Gamma n_i}{\Gamma n_i}$$
$$E\{\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k}\}=\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-1/k}\prod_{i=1}^{k}m_{i,-1/k}$$

حيث ان :

$m_{i,-1/k}$ **هو العزم $\frac{1}{k}$ لـ Y_i عندما $Y_i\approx\Gamma(n_i,1)$**

حيث ان :

$$\rho_{-1/k}=\prod_{i=1}^{k}m_{i,-1/k}$$

وبنفس الطريقة نجد التوقع لـ $\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-2/k}$ أي ان

$$E\{\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-2/k}\}=\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k}\,\rho_{-2/k} \qquad \text{.....(25)}$$

المبرهنة الاتية تعطينا مقدر جديد لـ $\gamma(\theta)$ يكون افضل من المقدر $\zeta^0(Y)$ باستخدام معدل مربع الخطأ وتنص هذه المبرهنة على

مبرهنة (٢-٢) :

ليكن $\zeta(Y)$ مقدر الى $\gamma(\theta)$ بالشكل الاتي :

$$\zeta(Y)=\zeta^0(Y)+b\prod_{i=1}^{K}Y_i^{-1/K} \quad .....(26)$$

فأن $\zeta(Y)$ هو مقدر افضل من $\zeta^0(Y)$ الى $\gamma(\theta)$ تحت دالة خسارة مربع الخطأ عندما $k\geq 2$ اذا تحقق احد الشروط الاتية :

$$1-If\ d_i>0,\forall i=1,2,3,.....,k\ and\ 0<b<\frac{2k\rho_{-1/k}d_{(1)}}{\theta_{-2/k}}$$
$$2-If\ d_i<0,\forall i=1,2,3,.....,k\ and\ \frac{2k\rho_{-1/k}d_{(k)}}{\theta_{-2/k}}<b<0$$
$$3-If\ any\ d_i=0\ for\ some\ i\ .$$

حيث ان :

$$d_i=n_i t_0^{\beta}-a_i r_{-(1+1/k),-1/k}$$
$$d_{(1)}=\min_i\{d_i\}$$
$$d_{(k)}=\max_i\{d_i\}$$

البرهان :

ليكن

$$\Delta[\gamma(\theta)]=R[\gamma(\theta),\zeta(Y)]-R[\gamma(\theta),\zeta^0(Y)]$$

هو الفرق بين معدل مربع الخطأ ، حيث ان :

$$R[\gamma(\theta),\zeta^0(Y)]=E\{L[\gamma(\theta),\zeta^0(Y)]\}$$

وباستخدام تعريف معدل مربع الخطأ نحصل على :

$$\Delta[\gamma(\theta)]=E[\zeta(Y)-\gamma(\theta)]^2+E[\zeta^0(Y)-\gamma(\theta)]^2$$

$$\Delta[\gamma(\theta)]=E[(\sum_{i=1}^{k}a_iY_i^{-1})^2+2b\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k}\sum_{i=1}^{k}a_iY_i^{-1}+b^2\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-2/k}$$

بالتعويض عن كل من $\zeta(y),\zeta^0(y),\gamma(\theta)$ نحصل على :

$$-2\sum_{i=1}^{k}n_it_0^{\beta}\theta_i^{-1}\sum_{i=1}^{k}a_iY_i^{-1}-2b\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k}\sum_{i=1}^{k}n_it_0^{\beta}\theta_i^{-1}$$

$$-(\sum_{i=1}^{k}a_iY_i^{-1})^2+2\sum_{i=1}^{k}n_it_0^{\beta}\theta_i^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iY_i^{-1}]$$

$$\Delta[\gamma(\theta)]=E[2b\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k}\sum_{i=1}^{k}a_iY_i^{-1}+b^2\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-2/k}-2b\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k}\sum_{i=1}^{k}n_it_0^{\beta}\theta_i^{-1}]$$

$$\Delta[\gamma(\theta)]=b^2E(\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-2/k})-2bE(\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k})\sum_{i=1}^{k}n_it_0^{\beta}\theta_i^{-1}$$

$$+2bE(\prod_{i=1}^{k}Y_i^{-1/k})\sum_{i=1}^{k}a_i\theta_i^{-1}r_{-(1+1/k),-1/k}]$$

وبالتعويض عن التوقعات (اي E المتحركة) في المعادلتين (24) و (25) نحصل على :

$$\Delta[\gamma(\theta)]=b^2\rho_{-2/k}(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k})-2b\gamma(\theta)\rho_{-1/k}(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-1/k})\sum_{i=1}^{k}n_it_0^{\beta}\theta_i^{-1}$$
$$+2b\rho_{-1/k}(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-1/k})\sum_{i=1}^{k}a_i\theta_i^{-1}r_{-(1+1/k),-1/k}]$$

وعند استخراج عامل مشترك من الحدين الثاني والثالث نحصل على :

$$\Delta[\gamma(\theta)]=b^2\rho_{-2/k}(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k})-2b\rho_{-1/k}(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-1/k})\{\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{-1}[n_i t_0^{\beta}-a_i r_{-(1+1/k),-1/k}]\}$$

الان نفرض ان :

$$d_i=n_i t_0^{\beta}-a_i r_{-(1+1/k),-1/k}$$

$$\therefore \Delta[\gamma(\theta)]=b^2\rho_{-2/k}(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k})-2b\rho_{-1/k}(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-1/k})\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{-1}d_i$$

١- If $d_i>0 \quad \forall i$ **then :**

$$\Delta[\gamma(\theta)]\le b^2\rho_{-2/k}(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k})-2b\rho_{-1/k}(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-1/k})\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{-1}d_{(1)}$$

وبإستخراج $b(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k})$ **عامل مشترك نحصل على :**

$$\Delta[\gamma(\theta)]\le b(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k})\{b\rho_{-2/k}-2\rho_{-1/k}d_{(1)}\frac{\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{-1}}{(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-1/k})}\}$$

وباستخدام النتيجة الآتية :

لكل قيم i حيث $i=1,2,3,.....,k$ **فأن :**

$$\frac{\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-1/k}}{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{-1}}\le 1$$

نحصل على :

$$\Delta[\gamma(\theta)]\le b(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k})\{b\rho_{-2/k}-2k\rho_{-1/k}d_{(1)}\}$$

نستنتج من ذلك ان

$$\Delta[\gamma(\theta)]<0 \text{ , if } \quad 0<b<\frac{2k\rho_{-1/k}d_{(1)}}{\rho_{-2/k}}$$

٢- If $d_i<0 \quad \forall i$ **then :**

$$\Delta[\gamma(\theta)]\le b^2\rho_{-2/k}(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k})-2b\rho_{-1/k}(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-1/k})\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{-1}d_{(k)}$$

وكذلك بإستخراج $b(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k})$ **عامل مشترك نحصل على :**

$$\Delta[\gamma(\theta)]\le b(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k})\{b\rho_{-2/k}-2\rho_{-1/k}d_{(k)}\frac{\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{-1}}{(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-1/k})}\}$$

وباستخدام النتيجة السابقة نفسها نحصل على :

$$\Delta[\gamma(\theta)]\le b(\prod_{i=1}^{k}\theta_i^{-2/k})\{b\rho_{-2/k}-2k\rho_{-1/k}d_{(k)}\}$$

نستنتج من ذلك

$$\Delta[\gamma(\theta)]<0 \text{ , if } \quad \frac{2k\rho_{-1/k}d_{(k)}}{\rho_{-2/k}}<b<0$$

وبذلك يكون المقدر الافضل لدالة معولية النظام المتسلسل باستخدام طريقة المقدر غير المتحيز ذي اقل تباين المحسنة (IMVUE) بالشكل الاتي :

$$\hat{R}_{S2}(t_0)=\exp\{-\zeta(Y)\} \qquad \text{.....(27)}$$

المصادر References

المصادر العربية Arabic References

[1] العلي ، عذراء رضا عبد الكريم (١٩٩٩) ، "بعض مقدرات الاختبار الاولي لمعالم ودالة المعولية لتوزيع Weibull "، رسالة ماجستير ، كلية التربية/ابن الهيثم – جامعة بغداد .

[2] البياتي ، حسام نجم عبود (٢٠٠٢) ، "مقارنة طرائق انموذج ويبل للفشل باستخدام المحاكاة" ، اطروحة دكتوراه ، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد.

[3] العبيدي ، نادية جعفر فزع (٢٠٠٤) ، "مقارنة تجريبية بين مقدرات M.L. & Bayes لتوزيع كاما العام" ، رسالة ماجستير ، كلية العلوم – الجامعة المستنصرية .

المصادر الاجنبية Foreign References

[4] Weibull , W. (1939) , "A Statistical theory of the strength of materials" , Ingeniors Vetenskaps Akademiens Handlinger , No. 151 , Generalstabens Litografiska Anstaits , Furiag , Stocholm , Sweden .

[5] Richard , E. B. Scheuer , E. M. and Madansky , A. (1968) , "Statistical Estimation procedures for the (Burn-In) process" , Technometrics , Vol. 10 , No. 1 , P. 51 .

[6] Sinha , S. K. and Kale , B. K. (1980) , "Life testing and Reliability Estimation", Wiley Eastern Limited .

[7] Dey , Dipak K. & Jaisingh , Lioyd R. (1988) , "Estimation of system Reliability for Independent Series Components with Weibull life Distributions", IEEE Transaction on Reliability , Vol.37 , No.4 , pp. 401-405 .